

ს. თოფურია, ვ. ხოჭოლავა,
გ. აბესაძე, ზ. მეტრეველი

მათემატიკა

მეორე ნაწილი

გეომეტრია

(თეორია და ამოცანათა კრებული)



რეკომენდებულია სტუდენტების
სარედაქციო-საგამომცემლო საბჭოს
მიერ სახელმძღვანელოდ უმაღლეს
სასწავლებლებში შემსველელთათვის

პროფ. ს. თოფურიას რედაქციით

მეხუთე გადამუშავებული გამოცემა

თბილისი
2009

წიგნი „მათემატიკა, მეორე ნაწილი, გეომეტრია“ განკუთვნილია უმაღლეს სასწავლებლებში შემსვლელთათვის, ხოლო როგორც დამხმარე სახელმძღვანელო, დიდად სასარგებლო იქნება საშუალო სკოლებისათვის.

წიგნში მოცემული მასალის საფუძვლიანი შესწავლა უზრუნველყოფს მოსწავლე ახალგაზრდობის მათემატიკურ მომზადებას იმ დონეზე, რომელიც მოეთხოვება უმაღლეს სასწავლებლებში შემსვლელს.

წიგნი გამოადგება აგრეთვე ყველას, ვინც მათემატიკის სასკოლო კურსითაა დაინტერესებული.

- რეცენზენტები: 1. საქართველოს მეცნიერებათა
აკადემიის აკადემიკოსი
პროფ. *ა. კიღურაძე*
2. პროფესორი *ვ. პაატაშვილი*

კომპიუტერული უზრუნველყოფა ც. ცანავა
ე. ზარიძე

წინამდებარე გამოცემაზე ყველა უფლება ეკუთვნის ავტორებს. ავტორების წერილობითი თანხმობის გარეშე აკრძალულია წიგნის გადაბეჭდვა, ქსეროასლის დამზადება და მისი რეალიზაცია.

© საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2008
ISBN 978-9941-14-170-6 (ორივე ნაწილი)
ISBN 978-9941-14-172-0 (მეორე ნაწილი)

მეოთხე გამოცემის წინასიტყვაობა

წიგნის “მათემატიკა, მეორე ნაწილი, გეომეტრია, ” წინა სამი გამოცემა საქართველოს განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებული იყო სახელმძღვანელოდ უმაღლესი სასწავლებლების მოსამზადებელი განყოფილების მსმენელებისა და აბიტურიენტებისათვის. იგი მთლიანად მოიცავს უმაღლეს სასწავლებლებში მისაღები გამოცდების პროგრამით გათვალისწინებულ მასალას. შედგება ის ორი განყოფილებისაგან. პირველ განყოფილებაში გადმოცემულია თეორიული მასალა, რომლის აგების დროს შეძლებისდაგვარად გათვალისწინებულია საკითხების გადმოცემის ღრვიკური თანმიმდევრობა. ამასთან, საშუალო სკოლის სახელმძღვანელოებისაგან განსხვავებით, ყოველი კონკრეტული საკითხის შესაბამისი მასალა თავმოყრილია ერთად.

მეორე განყოფილება ამოცანათა კრებულია, რომელიც შეიცავს თეორიული მასალის შესაბამის მრავალ ამოცანას. ისინი დალაგებულია თემების მიხედვით, მათი ტიპებისა და სირთულის გათვალისწინებით შემდეგი პრინციპით: 1) ამოცანები გამოთვლაზე, 2) ამოცანები დამტკიცებაზე. პლანიმეტრიისა და სტერეომეტრიის ბოლოს მოცემულია სხვადასხვა სახის ამოცანები გამოთვლაზე და დამტკიცებაზე. ამოცანების ასეთი დალაგება მოსწავლეს გაუადვილებს სკოლაში შესწავლილი მასალის გამეორებას და შეძენილი ცოდნის გაღრმავებას.

მეოთხე გამოცემა მთლიანად გადამუშავებულია და არსებითად შევსებულია, გასწორებულია შემწეული უზუსტობანი.

წიგნი რომ სასარგებლო იყოს ყველასათვის, ვინც მათემატიკის სასკოლო კურსითაა დაინტერესებული, მასში შეტანილი ზოგიერთი ამოცანა საშუალოზე უფრო მაღალი სირთულისაა.

ავტორები მადლობას უხდიან ყველას, ვინც მოგვაწოდა შენიშვნები შემწეულ ხარვეზებზე.

ავტორები სიამოვნებით მიიღებენ მკითხველთა ყველა საქმიან შენიშვნას, რომლებიც გათვალისწინებული იქნება წიგნის შემდგომ გამოცემაში.

მეხუთე გამოცემის წინასიტყვაობა

მეხუთე გამოცემაში გასწორებულია შემჩნეული უზუსტობანი. დამატებულია ის საკითხები, რომლებიც მისაღები გამოცდების ახალი პროგრამით არის გათვალისწინებული.

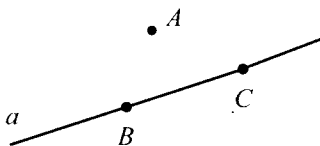
ავტორები მადლობას უხდიან ყველას, ვინც მოგვაწოდა შენიშვნები შემჩნეულ ხარვეზებზე.

პლანიმეტრია

§1. პლანიმეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები

ძირითად გეომეტრიულ ფიგურებს სიბრტყეზე წარმოადგენს წერტილი და წრფე. წერტილები აღინიშნება დიდი ლათინური ასოებით: $A, B, C, D, \dots$, ხოლო წრფეები მცირე ლათინური ასოებით: $a, b, c, d, \dots$.

წერტილისა და წრფის ცნება გეომეტრიის პირველადი ცნებებია. მათზე წარმოადგენას გეომეტრის I-ელ ნახაზზე გამოსახული ფიგურები: წერტილი A და წრფე a (იგულისხმება, რომ წრფე ორივე მხარეს უსასრულოდ გრძელდება).



ჩამოვყალიბოთ პლანიმეტრიის აქსიომები, რომლებსაც დავეყვით ხუთ ჯგუფად.

ნახ. 1

I. წერტილებისა და წრფეების მიკუთვნების აქსიომები

აქსიომა I₁. ყოველი წრფისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ეკუთვნის ამ წრფეს და წერტილები, რომლებიც მას არ ეკუთვნის.

აქსიომა I₂. ყოველ ორ წერტილზე გადის წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

წრფე შეიძლება აღვნიშნოთ მასზე მდებარე ნებისმიერი ორი წერტილის მითითებით. მაგალითად, I-ელ ნახაზზე გამოსახული a წრფე შეიძლება ასეც აღვნიშნოთ – BC .

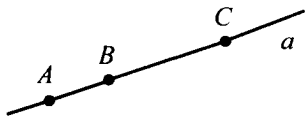
ვიტყვიით, რომ ორი წრფე იკვეთება, თუ არსებობს წერტილი, რომელიც ორივე წრფეს ეკუთვნის. ამ წერტილს გადაკვეთის წერტილი ეწოდება.

თეორემა 1.1. თუ ორი წრფე იკვეთება, მაშინ მათ გააჩნიათ გადაკვეთის ერთადერთი წერტილი.

დამტკიცება. თუ დაუშვებთ, რომ მოცემული წრფეები იკვეთება ორ წერტილში, მაშინ მივიღებთ: ორ განსხვავებულ წერტილზე გადის ორი სხვადასხვა წრფე, რაც I_2 აქსიომას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

II. წრფესა და სიბრტყეზე წერტილთა ურთიერთგანლაგების აქსიომები

განვიხილოთ a წრფეზე მდებარე A , B და C წერტილები (ნახ. 2). B წერტილი მდებარეობს A და C წერტილებს შორის,



ნახ. 2

ანუ A და C წერტილები მდებარეობენ B წერტილიდან სხვადასხვა მხარეს. B და C წერტილები მდებარეობენ A წერტილიდან ერთ მხარეს, ასევე, A და B წერტილები მდებარეობენ ერთ მხარეს C წერტილიდან.

აქსიომა II₁. წრფეზე მდებარე სამი წერტილიდან ერთი და მხოლოდ ერთი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის.

განსაზღვრება. მონაკვეთი ეწოდება წრფის ნაწილს, რომელიც შედგება ამ წრფის ორი მოცემული წერტილის და მათ შორის მდებარე ყველა წერტილისაგან. მოცემულ წერტილებს მონაკვეთის ბოლოები ეწოდება.

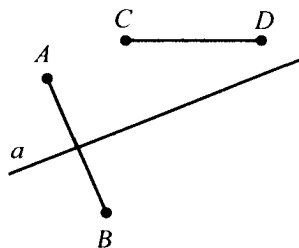
მონაკვეთი აღინიშნება მისი ბოლოების მითითებით. მაგალითად, მონაკვეთი, რომლის ბოლოებია A და B , ასე აღინიშნება AB .

განსაზღვრება. სხივი ეწოდება წრფის ნაწილს, რომელიც შედგება ამ წრფის მოცემული წერტილისა და მის ერთ მხარეს მდებარე ყველა წერტილისაგან. მოცემულ წერტილს სხივის საწყისი წერტილი ანუ სათავე ეწოდება.

სხივი აღინიშნება მისი სათავესა და ამ სხივზე მდებარე რაიმე წერტილის მითითებით, ამასთან სათავეს აღმნიშვნელი ასო იწერება პირველ ადგილზე. სხივი, რომლის სათავეა A და მასზე მდებარე რაიმე წერტილია B ასე აღინიშნება AB . სხივი შეიძლება აღინიშნოს მცირე ლათინური ასოებითაც.

ერთ წრფეზე მდებარე საერთო სათავეს მქონე სხვადასხვა სხივებს დამატებითი სხივები ეწოდება.

განვიხილოთ სიბრტყეზე მდებარე რაიმე a წრფე (ნახ. 3). იგი სიბრტყეს ეოფს ორ ნახევარსიბრტყედ. თუ A და B წერტილები ეკუთვნიან სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეს, მაშინ AB მონაკვეთი კვეთს a წრფეს. თუ C და D წერტილები ეკუთვნიან ერთ ნახევარსიბრტყეს, მაშინ CD მონაკვეთი და a წრფე არ იკვეთებიან.



ნახ. 3

აქსიომა II₂. წრფე სიბრტყეს ეოფს ორ ნახევარსიბრტყედ.

III. მონაკვეთებისა და კუთხეების გაზომვის აქსიომები

აქსიომა III. ყოველ მონაკვეთს აქვს დადებითი სიგრძე. მონაკვეთის სიგრძე უდრის იმ მონაკვეთების სიგრძეების ჯამს, რომლებადაც იგი იყოფა ნებისმიერი წერტილით.

ამ აქსიომის თანახმად თუ AB მონაკვეთზე ავიღებთ ნებისმიერ C წერტილს, მაშინ AB მონაკვეთის სიგრძე AC და CB მონაკვეთების სიგრძეების ჯამის ტოლია. AB მონაკვეთის სიგრძეს ეწოდება აგრეთვე მანძილი A და B წერტილებს შორის. თუ A და B წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ მათ შორის მანძილი ნულის ტოლად არის მიღებული.

ორ მონაკვეთს ეწოდება ტოლი თუ მათ ტოლი სიგრძეები აქვთ.

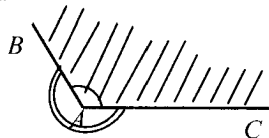
განსაზღვრება. საერთო სათავის მქონე ორი განსხვავებული სხივით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს, ამ სხივების ჩათვლით, კუთხე ეწოდება. ამ სხივებს კუთხის გვერდები ეწოდება, ხოლო მათ სათავეს – წვეროს.

ხშირად ნაცვლად სიტყვისა “კუთხე” ვიხმაროთ ნიშანს “ $\angle$ ”. კუთხე, რომლის გვერდებია OA და OB (ნახ. 4) ასე აღინიშნება: $\angle O$ ან $\angle AOB$. ამ უკანასკნელში A და B კუთხის სხვადასხვა გვერდებზე მდებარე წერტილებია, ამასთან კუთხის წვეროს აღმნიშვნელი ასო შუაში იწერება.

ნახ. 4

საერთო სათავის მქონე ორი განსხვავებული სხივი განსაზღვრავს ორ კუთხეს, რომელთაც დამატებითი კუთხეები ეწოდებათ.

დამატებითი კუთხეებიდან უფრო ხშირად განვიხილავთ იმ კუთხეს, რომელიც წარმოადგენს ნახევარსიბრტყის ნაწილს. მე-5 ნახაზზე დაშტრიხულია AB და AC სხივებით შედგენილი ასეთი კუთხე.

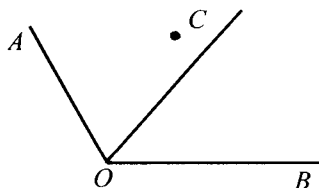


ნახ. 5

განსაზღვრება. კუთხეს, რომლის გვერდები წარმოადგენენ დამატებითი სხივებს, გაშლილი კუთხე ეწოდება.

ვიტყვიით, რომ სხივი გადის კუთხის გვერდებს შორის, თუ მისი სათავეა კუთხის წვერო და ეკუთვნის ამ კუთხეს. მაგალითად, OC სხივი გადის $\angle AOB$ -ს გვერდებს შორის (ნახ. 6).

აქსიომა III. ყოველ კუთხეს დადებითი გრადუსული ზომა აქვს. გაშლილი კუთხე 180° -ის ტოლია. კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია იმ კუთხეების გრადუსული ზომების ჯამისა, რომლებდაც იგი იყოფა მის გვერდებს შორის გამავალი ნებისმიერი სხივით.



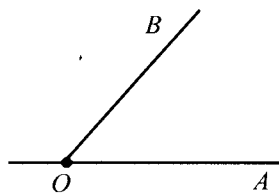
ნახ. 6

მაგალითად, $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (ნახ. 6). ორ კუთხეს ეწოდება ტოლი, თუ მათი გრადუსული ზომები ტოლია.

IV. მონაკვეთებისა და კუთხეების გადადების და მოცემული სამკუთხედის ტოლი სამკუთხედის არსებობის აქსიომები

აქსიომა IV₁. ყოველ სხივზე მისი სათავიდან შეიძლება გადავდოთ მოცემული სიგრძის მონაკვეთი და მასთან მხოლოდ ერთი.

განვიხილოთ რაიმე OA სხივის შემცველი წრფით განსაზღვრული ერთ-ერთი ნახევარსიბრტყე. ავაგოთ 180° -ზე ნაკლები მოცემული გრადუსული ზომის კუთხე ისე, რომ მისი ერთი გვერდი დაემთხვეს OA სხივს, ხოლო მეორე აღმოჩნდეს არჩეულ ნახევარსიბრტყეში (ნახ. 7).



ნახ. 7

აქსიომა IV₂. ყოველი სხივიდან მოცემულ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავდოთ მოცემული, 180° -ზე ნაკლები, გრადუსული ზომის კუთხე და მასთან მხოლოდ ერთი.

განსაზღვრება. სამკუთხედი ეწოდება, ერთ წრფეზე არამდებარე სამი წერტილის წვეილ-წვეილად შეერთებით მიღებული სამი მონაკვეთით შემოსაზღვრულ სიბრტყის ნაწილს, ამ მონაკვეთების ჩათვლით. მოცემულ სამ წერტილს სამკუთხედის წვეროები ეწოდება, ხოლო მათ შემაერთებულ მონაკვეთებს – სამკუთხედის გვერდები.

სამკუთხედი აღინიშნება მისი წვეროების მითითებით. ხშირად ნაცვლად სიტყვისა “სამკუთხედი” ვიხმარებთ ნიშანს “ Δ ”. მაგალითად, სამკუთხედი, რომლის წვეროებია A , B და C , ასე აღინიშნება ΔABC .

ABC სამკუთხედის A წვეროსთან მდებარე კუთხე ეწოდება AB და AC სხივებით შედგენილ კუთხეს. A კუთხეს ეწოდოთ BC გვერდის მოპირდაპირე კუთხე, ხოლო BC გვერდს კი – A კუთხის მოპირდაპირე გვერდი. ანალოგიურად განისაზღვრება B და C წვეროებთან მდებარე კუთხეები.

ვიტყვი, რომ ორი სამკუთხედი ტოლია, თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის სამი გვერდის და ტოლი გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები აგრეთვე ტოლია. მაშასადამე, სამკუთხედები ტოლია, თუ მათი შესაბამისი კუთხეები და შესაბამისი გვერდები ტოლია.

სამკუთხედების ტოლობის აღსანიშნავად იხმარება ტოლობის ჩვეულებრივი ნიშანი: “=”. ამრიგად, ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობა ასე ჩაიწერება $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

ვთქვათ მოცემულია ΔABC , a სხივი და ამ სხივის შემცველი წრფით განსაზღვრული ერთ-ერთი ნახევარსიბრტყე. გადავაადგილოთ ΔABC ისე, რომ A წვერო დაემთხვეს a სხივის სათავეს, B წვერო მოთავსდეს a სხივზე, ხოლო C წვერო – მოცემულ ნახევარსიბრტყეში. ახალ მდებარეობაში სამკუთხედის წვეროები აღენიშნოთ შესაბამისად $A_1B_1C_1$ -ით. ცხადია, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

აქსიომა IV₃. ყოველი სამკუთხედისთვის არსებობს მისი ტოლი სამკუთხედი, რომელსაც მოცემული მდებარეობა აქვს მოცემული სხივის მიმართ.

V. პარალელური წრფეების აქსიომა

განსაზღვრება. სიბრტყეზე მდებარე ორ წრფეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი არ იკვეთებიან.

წრფეთა პარალელურობის აღსანიშნავად გამოიყენება ნიშანი: “||”. ჩანაწერი $a||b$ ნიშნავს, რომ a წრფე პარალელურია b წრფის.

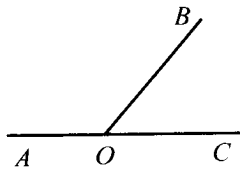
აქსიომა V. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება ამ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფის გაკვლევა.

მონაკვეთებს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი პარალელურ წრფეებზე მდებარეობენ.

§2. კუთხეები

განსაზღვრება. ორ კუთხეს მოსაზღვრე ეწოდება, თუ მათ ერთი გვერდი საერთო აქვთ, ხოლო დანარჩენი დამატებით სხივებს წარმოადგენენ.

მე-8 ნახაზზე გამოსახული AOB და BOC კუთხეები მოსაზღვრეა, რადგან მათ OB გვერდი საერთო აქვთ, ხოლო OA და OC გვერდები დამატებით სხივებს წარმოადგენენ.



ნახ. 8

თეორემა 2.1. მოსაზღვრე კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ $\angle AOB$ და $\angle BOC$ – მოსაზღვრე კუთხეები (ნახ. 8). რადგან OB სხივი გადის გაშლილი კუთხის OA და OC გვერდებს შორის, ამიტომ III აქსიომის თანახმად $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$. თეორემა დამტკიცებულია.

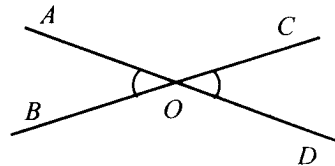
ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ტოლი კუთხეების მოსაზღვრე კუთხეები ტოლია.

შევნიშნათ, რომ თუ კუთხე გაშლილი არ არის და წარმოადგენს ნახევარსიბრტყის ნაწილს, მაშინ მისი გრადუსული ზომა ნაკლებია 180° -ზე, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევაში კი 180° -ზე მეტია. მოცემული α კუთხის დამატებითი კუთხის გრადუსული ზომაა $360^\circ - \alpha$.

განსაზღვრება. 90° -ის ტოლ კუთხეს მართი კუთხე ეწოდება. 90° -ზე ნაკლებ კუთხეს მახვილი კუთხე ეწოდება. 90° -ზე მეტ და 180° -ზე ნაკლებ კუთხეს ბლაგვი კუთხე ეწოდება.

2.1 თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მართი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე მართია, მახვილი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე – ბლაგვია, ხოლო ბლაგვი კუთხის მოსაზღვრე კუთხე – მახვილია.

განსაზღვრება. ორ კუთხეს ვერტიკალური ეწოდება, თუ ერთი კუთხის გვერდები წარმოადგენენ მეორე კუთხის გვერდების დამატებით სხივებს.



ნახ. 9

მე-9 ნახაზზე გამოსახული AOB და COD კუთხეები ვერტიკალურია, რადგან OC და OD სხივები წარმოადგენენ შესაბამისად OB და OA სხივების დამატებით სხივებს.

თეორემა 2.2. ვერტიკალური კუთხეები ტოლია.

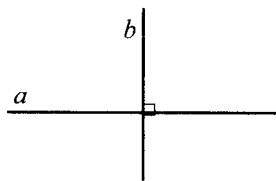
დამტკიცება. ვთქვათ AOB და COD კუთხეები ვერტიკალურია (ნახ. 9). $\angle AOC$ მოსაზღვრეა როგორც AOB , ასევე COD კუთხისათვის. ამიტომ 2.1 თეორემის ძალით

$$\angle AOB + \angle AOC = 180^\circ,$$

$$\angle COD + \angle AOC = 180^\circ,$$

საიდანაც $\angle AOB = \angle COD$. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ a და b ორი გადაკვეთი წრფეა. გადაკვეთისას ეს წრფეები ქმნიან ოთხ კუთხეს. ყოველი მათგანისათვის დანარჩენი სამი კუთხიდან თითოეული ან მოსაზღვრეა ან ვერტიკალური. ამიტომ, თუ ერთ-ერთი კუთხე მართია, მაშინ დანარჩენი კუთხეებიც მართი იქნება. ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ წრფეები მართი კუთხით იკვეთებიან (ნახ. 10).



ნახ. 10

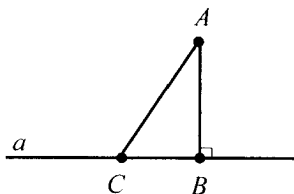
განსაზღვრება. ორ წრფეს ეწოდება პერპენდიკულარული (მართობული), თუ ისინი მართი კუთხით იკვეთებიან.

წრფეთა პერპენდიკულარობის აღსანიშნავად გამოიყენება ნიშანი „ $\perp$ “. ჩანაწერი $a \perp b$ ნიშნავს, რომ a წრფე პერპენდიკულარულია b წრფის.

ორ მონაკვეთს პერპენდიკულარული ეწოდება, თუ ისინი პერპენდიკულარულ წრფეებზე მდებარეობენ.

განსაზღვრება. მოცემული წრფის პერპენდიკულარი (მართობი) ეწოდება მისი პერპენდიკულარული წრფის მონაკვეთს, რომლის ერთი ბოლო ამ წრფეთა გადაკვეთის წერტილია. ამ წერტილს პერპენდიკულარის ფუძე ეწოდება.

განსაზღვრება. წრფისადმი დახრილი ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც წრფეზე არამდებარე წერტილს წრფის რაიმე წერტილთან აერთებს და პერპენდიკულარისაგან განსხვავდება. წრფეზე მდებარე დახრილის ბოლოს დახრილის ფუძე ეწოდება.

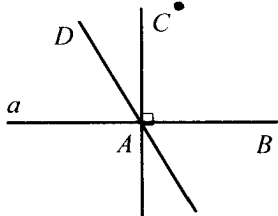


ნახ. 11

მე-11 ნახაზზე გამოსახული AB მონაკვეთი წარმოადგენს a წრფის პერპენდიკულარს, ხოლო AC მონაკვეთი – დახრილს. B წერტილი პერპენდიკულარის ფუძეა, C წერტილი კი დახრილის ფუძე. CB მონაკვეთს AC დახრილის გეგმილი ეწოდება.

თეორემა 2.3. წრფის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება გავავლოთ მისი პერპენდიკულარული წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

დამტკიცება. განვიხილოთ a წრფე, მასზე მდებარე რაიმე A წერტილი და ამ წრფეზე მდებარე AB სხივი (ნახ. 12). AB სხივიდან გადავდლოთ 90° -ის ტოლი BAC კუთხე (აქსიომა IV_2). მაშინ AC სხივის შემცველი წრფე იქნება a წრფის პერპენდიკულარული.



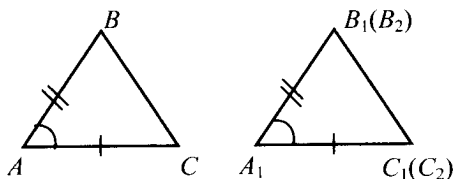
ნახ. 12

ვთქვათ არსებობს A წერტილზე გამავალი a წრფის პერპენდიკულარული ორი წრფე. ავიღოთ ამ წრფეებზე მდებარე ისეთი C და D წერტილები, რომლებიც a წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ (ნახ. 12). მივიღეთ, რომ a წრფეზე მდებარე AB სხივიდან ერთ ნახევარსიბრტყეში გადაღებულია ორი BAC და BAD მართი კუთხე, რაც IV_2 აქსიომას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

§3. სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. სამკუთხედის ელემენტები

თეორემა 3.1 (სამკუთხედების ტოლობის ნიშანი ორი გვერდითა და მათ შორის მდებარე კუთხის მიხედვით – I ნიშანი). თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის და მათ შორის მდებარე კუთხის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$ (ნახ. 13).



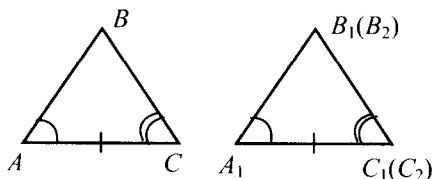
ნახ. 13

დავამტკიცოთ, რომ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. არსებობს $\triangle ABC$ -ს ტოლი $\triangle A_1B_2C_2$, რომლის C_2 წვერო ძეგს A_1C_1 სხივზე, B_2 კი – A_1C_1 წრფით განსაზღვრულ იმ ნახევარსიბრტყეში, რომელშიც B_1

მდებარეობს (აქსიომა IV₃). რადგან $A_1C_1=A_1C_2$ ამიტომ C_2 წერტილი დაემთხვევა C_1 წერტილს (აქსიომა IV₁). ვინაიდან $\angle B_1A_1C_1=\angle B_2A_1C_1$, ამიტომ A_1B_2 სხივი დაემთხვევა A_1B_1 სხივს (აქსიომა IV₂). რადგან $A_1B_1=A_1B_2$, ამიტომ B_2 წერტილი დაემთხვევა B_1 წერტილს. ამრიგად, $\triangle A_1B_2C_2$ დაემთხვა $\triangle A_1B_1C_1$ -ს, ეს კი ნიშნავს, რომ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.2 (სამკუთხედების ტოლობის ნიშანი გვერდითა და მასთან მდებარე კუთხეების მიხედვით – II ნიშანი). თუ ერთი სამკუთხედის ერთი გვერდი და მასთან მდებარე ორი კუთხე ტოლია მეორე სამკუთხედის ერთი გვერდის და მასთან მდებარე ორი კუთხის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$ (ნახ. 14).



ნახ. 14

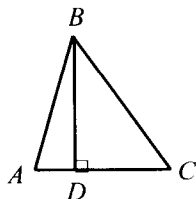
დავამტკიცოთ, რომ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. არსებობს $\triangle ABC$ -ს ტოლი $\triangle A_1B_2C_2$, რომლის C_2 წვერო ძევს A_1C_1 სხივზე, B_2 კი – A_1C_1 წრფით განსაზღვრულ იმ ნახევარსიბრტყეში, რომელშიც B_1 მდებარეობს (აქსიომა IV₃). რადგან $A_1C_1=A_1C_2$, ამიტომ C_2 წერტილი დაემთხვევა C_1 წერტილს (აქსიომა IV₁). ვინაიდან $\angle B_1A_1C_1=\angle B_2A_1C_1$ და $\angle B_1C_1A_1=\angle B_2C_1A_1$, ამიტომ A_1B_2 და C_1B_2 სხივები დაემთხვევიან შესაბამისად A_1B_1 და C_1B_1 სხივებს (აქსიომა IV₂). აქედან გამომდინარეობს, რომ B_2 წერტილი დაემთხვევა B_1 წერტილს. ამრიგად $\triangle A_1B_2C_2$ დაემთხვევა $\triangle A_1B_1C_1$ -ს, ეს კი ნიშნავს, რომ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშანი.

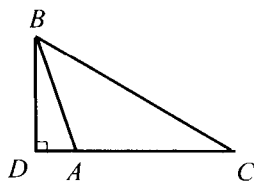
თეორემა 3.3 (სამკუთხედების ტოლობის ნიშანი სამი გვერდის მიხედვით – III ნიშანი). თუ ერთი სამკუთხედის სამი გვერდი შესაბამისად ტოლია მეორე სამკუთხედის სამი გვერდის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

განსაზღვრება. სამკუთხედის სიმაღლე ეწოდება მისი წვეროდან ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შემცველ წრფესადმი გაკლებულ პერპენდიკულარს.

მე-15 ნახაზზე გამოსახული ABC სამკუთხედის B წვეროდან დაშვებული BD სიმაღლის ფუძე ძევს AC გვერდზე, ხოლო მე-16 ნახაზზე გამოსახული ABC სამკუთხედის BD სიმაღლის ფუძე კი – AC გვერდის გაგრძელებაზე.



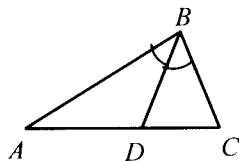
ნახ. 15



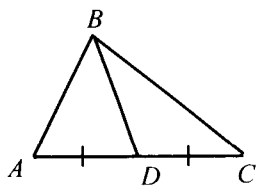
ნახ. 16

განსაზღვრება. კუთხის ბისექტრისა ეწოდება სხივის, რომელიც გადის კუთხის გვერდებს შორის და ამ კუთხეს შუაზე ყოფს.

განსაზღვრება. სამკუთხედის ბისექტრისა ეწოდება მისი კუთხის ბისექტრის მონაკვეთს, რომელიც აერთებს ამ კუთხის წვეროს, მისი მოპირდაპირე გვერდის წერტილთან (ნახ. 17).



ნახ. 17



ნახ. 18

განსაზღვრება. სამკუთხედის მედიანა ეწოდება მისი წვეროს და ამ წვეროს მოპირდაპირე გვერდის შუა წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს (ნახ. 18).

სამკუთხედის გვერდებს, კუთხეებს, სიმაღლეებს, ბისექტრისებს და მედიანებს სამკუთხედის ელემენტები ეწოდება.

§4. წრფეთა პარალელურობის ნიშნები

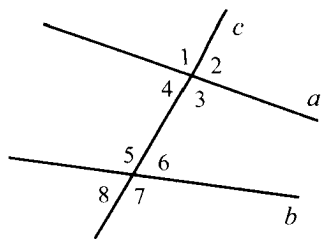
თეორემა 4.1 (წრფეთა პარალელურობის პირველი ნიშანი). ერთიდაიმავე წრფის პარალელური ორი წრფე პარალელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ a და b წრფეები c წრფის პარალელურია. დავუშვათ, რომ a და b წრფეები არ არიან პარალელური, ე. ი. იკვეთებიან რაიმე K წერტილში. ეს ნიშნავს, რომ K წერტილზე გადის c წრფის პარალელური ორი წრფე, რაც პარალელური წრფეების აქსიომას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ a და b წრფეებს c წრფე კვეთს სხვადასხვა წერტილში. მიღებული კუთხეები გადავნიშნოთ ისე, როგორც მე-19 ნახაზზეა.

$\angle 3$ -ს და $\angle 5$ -ს შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები ეწოდება. შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია აგრეთვე $\angle 4$ და $\angle 6$.

$\angle 3$ -ს და $\angle 6$ -ს შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეები ეწოდება. შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეებია აგრეთვე $\angle 4$ და $\angle 5$.



ნახ. 19

$\angle 1$ -ს და $\angle 5$ -ს შესაბამისი კუთხეები ეწოდება. შესაბამისია აგრეთვე კუთხეთა შემდეგი წყვილები: $\angle 2$ და $\angle 6$; $\angle 3$ და $\angle 7$; $\angle 4$ და $\angle 8$.

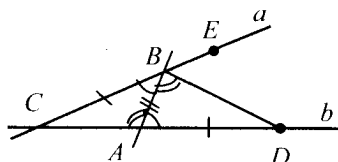
მოსაზღვრე და ვერტიკალური კუთხეების თვისებებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4.2. თუ რომელიმე შიგა ჯვარედინად მდებარე ან შესაბამისი კუთხეები ტოლია ან შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180° -ს, მაშინ ყოველი შიგა ჯვარედინად მდებარე და შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ხოლო შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180° -ს.

თეორემა 4.3 (წრფეთა პარალელურობის მეორე ნიშანი). თუ ორი წრფის მესამეთი გადაკვეთისას შიგა ჯვარედინად მდებარე ან შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ან შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180° -ს, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

დამტკიცება. საკმარისია დამტკიცება ჩავატაროთ მხოლოდ შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებისათვის (თეორემა 4.2).

დავუშვათ, რომ a და b წრფეები არ არიან პარალელური, ე. ი.



ნახ. 20

$\triangle BAC = \triangle ABD$. რადგან მათ AB გვერდი საერთო აქვთ, $AD = BC$ აგების თანახმად, ხოლო $\angle CBA = \angle DAB$ თეორემის პირობის თანახმად. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ABD = \angle BAC$. BAC და ABE შიგა ჯვარედინად მდებარე

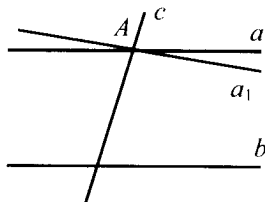
იკვეთებიან რაიმე C წერტილში (ნახ. 20). CA მონაკვეთის გაგრძელებაზე გადავდეთ CB -ს ტოლი AD მონაკვეთი, ხოლო CB მონაკვეთის გაგრძელებაზე ავიდეთ რაიმე E წერტილი. სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად

კუთხეები ტოლია თეორემის პირობის ძალით. ამრიგად, $\angle ABD = \angle ABE$, საიდანაც კუთხეების გადაღების აქსიომის თანახმად გამომდინარეობს, რომ BD და BE წრფეები ემთხვევიან. ეს კი შეუძლებელია, რადგან D წერტილი არ ძევს BE წრფეზე. ე. ი. $a \parallel b$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ ორი წრფე პერპენდიკულარულია მესამე წრფის, მაშინ ეს ორი წრფე პარალელურია.

თეორემა 4.4 (თეორემა 4.3-ის შეპრუნებული). თუ ორი პარალელური წრფე გადაკვეთილია მესამე წრფით, მაშინ ყოველი შიგა ჯვარედინად მდებარე და შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ხოლო შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეების ჯამი უდრის 180° -ს.

დამტკიცება. თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ შესაბამისი კუთხეები ტოლია. ვთქვათ c წრფე კვეთს a და b პარალელურ წრფეებს (ნახ. 21). A წერტილზე გავავლოთ a_1 წრფე ისე, რომ a_1 და b წრფეების c წრფით გადაკვეთისას მიღებული შესაბამისი კუთხეები იყოს ტოლი. 4.3 თეორემის თანახმად $a_1 \parallel b$. რადგან A წერტილზე შეიძლება b წრფის პარალელური ერთადერთი წრფის გავლება, ამიტომ a_1 წრფე ემთხვევა a წრფეს. ამრიგად, a და b წრფეების c წრფით გადაკვეთისას მიღებული შესაბამისი კუთხეები ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.



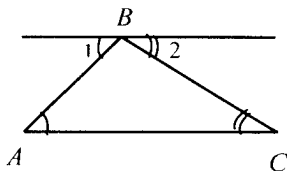
ნახ. 21

შედეგი. თუ წრფე პერპენდიკულარულია ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთისა, მაშინ ის მეორის პერპენდიკულარულიც იქნება.

§5. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. ტოლფერდა სამკუთხედი. დამოკიდებულება სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის

თეორემა 5.1. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180° -ის ტოლია.

დამტკიცება. ABC სამკუთხედის B წვეროზე გავავლოთ AC გვერდის პარალელური წრფე (ნახ. 22). $\angle 1 = \angle A$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები. ანალოგიურად $\angle 2 = \angle C$. ვინაიდან $\angle 1 + \angle B + \angle 2 = 180^\circ$ გვაქვს, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 22

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში ორი კუთხე მაინც მახვილია.

განსაზღვრება. სამკუთხედს, რომლის სამივე კუთხე მახვილია, მახვილკუთხა სამკუთხედი ეწოდება. სამკუთხედს, რომლის ერთ-ერთი კუთხე მართი ან ბლაგვია შესაბამისად მართკუთხა და ბლაგვკუთხა სამკუთხედი ეწოდება.

ცხადია, რომ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების ჯამი 90° -ის ტოლია.

მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის მოპირდაპირე გვერდს პიპოტენუსა ეწოდება, ხოლო დანარჩენ ორ გვერდს – კათეტები.

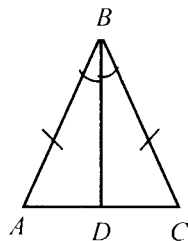
განსაზღვრება. სამკუთხედს, რომლის ორი გვერდი ტოლია, ტოლფერდა სამკუთხედი ეწოდება. ტოლ გვერდებს ფერდები ეწოდება, ხოლო მესამე გვერდს – ფუძე.

თეორემა 5.2. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძისადმი გაყვებული ბისექტრისა, მედიანა და სიმაღლე ერთმანეთს ემთხვევა.

დამტკიცება. ვთქვათ ტოლფერდა ABC სამკუთხედში $AB=BC$. გავავლოთ BD ბისექტრისა (ნახ. 23). $\triangle ABD=\triangle CBD$, სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად. გამომდინარე აქედან $AD=DC$, ე. ი. BD მედიანაა.

ამავე სამკუთხედების ტოლობიდან გვაქვს, რომ $\angle ADB$ და $\angle CDB$ მოსაზღვრე კუთხეები ტოლია და თითოეული მათგანი უდრის 90° -ს. ე. ი. BD სიმაღლეა. თეორემა დამტკიცებულია.

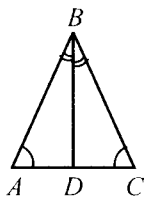
ამ თეორემის მტკიცებიდან გამომდინარეობს



ნახ. 23

შედეგი. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

თეორემა 5.3. თუ სამკუთხედის ორი კუთხე ტოლია, მაშინ იგი ტოლფერდაა.



ნახ. 24

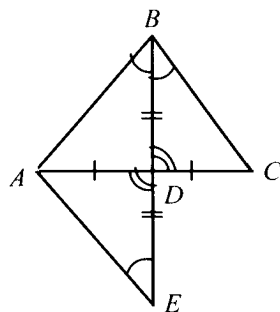
დამტკიცება. ვთქვათ ABC სამკუთხედში $\angle A=\angle C$ (ნახ. 24). გავავლოთ BD ბისექტრისა. რადგან $\triangle ABD$ სამკუთხედის ორი კუთხე $\triangle CBD$ სამკუთხედის ორი კუთხის ტოლია, ამიტომ $\angle ADB=\angle CDB$. რადგან $\angle ADB$ და $\angle CDB$ სამკუთხედებს BD გვერდი საერთო აქვთ, ამიტომ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად ისინი ერთმანეთის ტოლია. ე. ი. $AB=BC$. თეორემა დამტკიცებულია. •

თეორემა 5.4. თუ სამკუთხედის რომელიმე წვეროდან გაყვებული მედიანა და ბისექტრისა, ან მედიანა და სიმაღლე,

ან სიმაღლე და ბისექტრისა ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ ასეთი სამკუთხედი ტოლფერდაა.

დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემა იმ შემთხვევაში, როდესაც მედიანა ემთხვევა ბისექტრისას (დანარჩენი ორი შემთხვევის დამტკიცება მარტივია).

ვთქვათ ABC სამკუთხედში BD ერთ-
 ღროულად წარმოადგენს მედიანას და
 ბისექტრისას (ნახ. 25). BD -ს გაგრძელება-
 ზე გადავღოთ მისი ტოლი DE მონაკვეთი.
 E წერტილი შევეართოთ A წერტილთან.
 $\triangle ADE = \triangle CDB$ (სამკუთხედების ტოლობის
 პირველი ნიშნის თანახმად), რადგან
 $AD = DC$ პირობის ძალით, $BD = DE$ აგების
 თანახმად და $\angle ADE = \angle CDB$ როგორც
 ვერტიკალური კუთხეები. ამ სამკუთხედე-
 ბის ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ
 $AE = BC$ და $\angle AED = \angle DBC$. მეორე მხრივ
 $\angle ABD = \angle DBC$ რადგან BD ბისექტრისაა, ე.



ნახ. 25

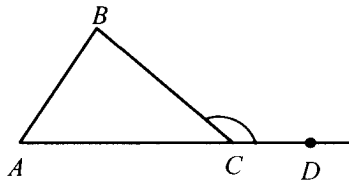
ი. $\angle AED = \angle ABD$, ამიტომ სამკუთხედი ABE ტოლფერდაა
 (თეორემა 5.3) და $AE = AB$. აქედან გამომდინარე, რადგან $AE = BC$,
 ამიტომ $AB = BC$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. სამკუთხედს, რომლის სამივე გვერდი ტოლია,
 ტოლგვერდა სამკუთხედი ეწოდება.

ცხადია, რომ ტოლგვერდა სამკუთხედის თითოეული კუთხე
 უდრის 60° -ს და პირიქით, თუ სამკუთხედის სამივე კუთხე
 ტოლია, მაშინ ასეთი სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

თუ ტოლფერდა სამკუთხედის რომელიმე კუთხე 60° -ის
 ტოლია, მაშინ ასეთი სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

განსაზღვრება. სამკუთხედის კუთხის მოსაზღვრე კუთხეს სამკუ-
 თხედის გარე კუთხე ეწოდება (ნახ. 26).



ნახ. 26

იმისათვის, რომ სამკუთხე-
 დის რომელიმე წვეროსთან
 მდებარე კუთხე ამავე წვეროს-
 თან მდებარე გარე კუთხეში
 არ აგვერიოს მას შიგა კუთხე-
 საც უწოდებენ.

თეორემა 5.5. სამკუთხედის გარე კუთხე მისი არამოსაზღვრე
 ორი შიგა კუთხის ჯამის ტოლია.

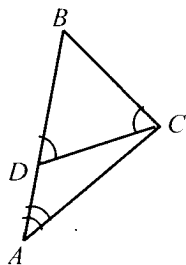
დამტკიცება. ვთქვათ ABC მოცემული სამკუთხედია (ნახ. 26).
 $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ (თეორემა 5.1), საიდანაც $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle ACB$.

ვინაიდან $180^\circ - \angle ACB = \angle BCD$ ამიტომ, $\angle A + \angle B = \angle BCD$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.5-დან გამომდინარეობს, რომ სამკუთხედის გარე კუთხე მეტია მის არამოსაზღვრე თითოეულ შიგა კუთხეზე.

თეორემა 5.6. სამკუთხედში ყოველი ორი გვერდიდან უდიდესის პირდაპირ უდიდესი კუთხე ძეგს.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC სამკუთხედში $AB > BC$ (ნახ. 27). BA გვერდზე B წერტილიდან გადაედოთ BC -ს ტოლი BD მონაკვეთი და D წერტილი შევაერთოთ C წერტილთან. $\triangle BDC$ ტოლფერდაა, ამიტომ $\angle BDC = \angle BCD$. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების თანახმად $\angle BDC > \angle A$, ე.ი. $\angle BCD > \angle A$. რადგან $\angle ACB > \angle BCD$, ამიტომ $\angle ACB > \angle A$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 27

თეორემა 5.7 (თეორემა 5.6-ის შეპრუნებული). სამკუთხედში ყოველი ორი კუთხიდან უდიდესის პირდაპირ უდიდესი გვერდი ძეგს.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC სამკუთხედში $\angle ACB > \angle A$ (ნახ. 27). დასამტკიცებელია, რომ $AB > BC$. დავეშვათ საწინააღმდეგო $AB \leq BC$.

თუ $AB = BC$, მაშინ $\triangle ABC$ ტოლფერდაა, რის გამოც $\angle A = \angle ACB$, რაც პირობას ეწინააღმდეგება. თუ $AB < BC$, მაშინ $\angle ACB < \angle A$ (თეორემა 5.6), რაც აგრეთვე ეწინააღმდეგება პირობას. ამრიგად, $AB > BC$. თეორემა დამტკიცებულია.

§6. მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები.

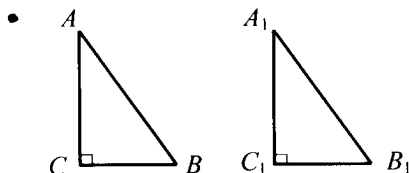
მანძილი წერტილიდან წრფემდე

თეორემა 5.7-დან გამომდინარე ცხადია, რომ მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული კათეტი ჰიპოტენუზაზე ნაკლებია.

სამკუთხედების ტოლობის ჩვენთვის ცნობილი ნიშნების გარდა მართკუთხა სამკუთხედებისათვის ადგილი აქვს აგრეთვე შემდეგ სამ ნიშანს:

თეორემა 6.1 (ტოლობის ნიშანი ჰიპოტენუზისა და მახვილი კუთხის მიხედვით). თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და მახვილი კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და მახვილი კუთხის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC და $A_1B_1C_1$ მართკუთხა სამკუთხედები C და C_1 მართი კუთხეებით (ნახ. 28), რომელთათვისაც $AB=A_1B_1$ და $\angle A=\angle A_1$.



ნახ. 28

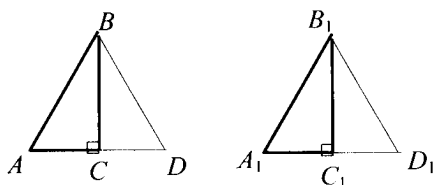
რადგან მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების ჯამი უდრის 90° -ს, ამიტომ $\angle B=\angle B_1$ და $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.2 (ტოლობის ნიშანი კათეტისა და მოპირდაპირე კუთხის მიხედვით). თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი და მოპირდაპირე კუთხე შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის კათეტისა და მისი მოპირდაპირე კუთხის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC და $A_1B_1C_1$ მართკუთხა სამკუთხედები C და C_1 მართი კუთხეებით (ნახ. 28), რომელთათვისაც $AC=A_1C_1$ და $\angle B=\angle B_1$. რადგან მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხეების ჯამი უდრის 90° -ს, ამიტომ $\angle A=\angle A_1$ და $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.3 (ტოლობის ნიშანი ჰიპოტენუზისა და კათეტის მიხედვით). თუ ერთი მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა და კათეტი, შესაბამისად ტოლია მეორე მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზისა და კათეტის, მაშინ ასეთი სამკუთხედები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC და $A_1B_1C_1$ მართკუთხა სამკუთხედები C და C_1 მართი კუთხეებით (ნახ. 29), რომელთათვისაც $AB=A_1B_1$ და $AC=A_1C_1$.



ნახ. 29

AC გვერდის გაგრძელებაზე გადავდეთ AC -ს ტოლი CD მონაკვეთი. D და B წერტილები შევაერთოთ. ABD სამკუთხედში

BC წარმოადგენს როგორც მედიანას ასევე სიმაღლეს, ამიტომ $\triangle ABD$ ტოლფერდაა (თეორემა 5.4). ე. ი. $AB=DB$.

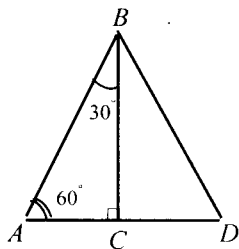
თუ A_1C_1 გვერდის გაგრძელებაზე გადავდებთ A_1C_1 -ის ტოლ C_1D_1 მონაკვეთს, ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $A_1B_1=D_1B_1$.

სამკუთხედების ტოლობის შესამე ნიშნის თანახმად $\triangle ABD=\triangle A_1B_1D_1$. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle A=\angle A_1$.

სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.4. მართკუთხა სამკუთხედში 30° -იანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\angle ABC=30^\circ$ (ნახ. 30). AC გვერდის გაგრძელებაზე გადავდოთ AC -ს ტოლი CD მონაკვეთი. D და B წერტილები შევეერთოთ. ABD სამკუთხედში BC წარმოადგენს როგორც მედიანას ასევე სიმაღლეს, ამიტომ $\triangle ABD$ ტოლფერდაა (თეორემა 5.4). რადგან ABC მართკუთხა სამკუთხედში $\angle ABC=30^\circ$, ამიტომ $\angle A=60^\circ$. მივიღეთ, რომ ABD ტოლფერდა სამკუთხედში $\angle A=60^\circ$, ე. ი. $\triangle ABD$ ტოლგვერდაა. ამრიგად,



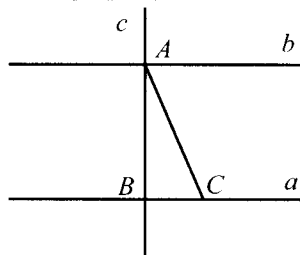
ნახ. 30

$$AC = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 6.5. წრფეზე არამდებარე ნებისმიერი წერტილიდან ამ წრფეზე შეიძლება ერთადერთი პერპენდიკულარის დაშვება.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია a წრფე და მასზე არამდებარე A წერტილი (ნახ. 31). A წერტილზე გავავლოთ a წრფის პარალელური b წრფე. გავავლოთ ახლა A წერტილზე b წრფის პერპენდიკულარული c წრფე (თეორემა 2.3). რადგან $a \parallel b$, ამიტომ c წრფე პერპენდიკულარულია a წრფის და კვეთს მას რაიმე B წერტილში. ცხადია, AB წარმოადგენს A წერტილიდან a წრფეზე დაშვებულ პერპენდიკულარს.



ნახ. 31

ვთქვათ, A წერტილიდან a წრფეზე

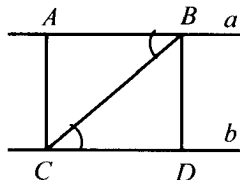
შეიძლება ორი AB და AC პერპენდიკულარის დაშვება (ნახ. 31). მაშინ ABC სამკუთხედს ექნება ორი მართი კუთხე, რაც შეუძლებელია. თეორემა დამტკიცებულია.

ცხადია, რომ თუ მოცემული წერტილიდან წრფისადმი გავლებულია პერპენდიკულარი და ნებისმიერი დახრილი, მაშინ პერპენდიკულარის სიგრძე ნაკლებია დახრილის სიგრძეზე.

მოცემული წერტილიდან წრფეზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძეს ეწოდება მანძილი ამ წერტილიდან წრფემდე.

თეორემა 6.6. წრფის ნებისმიერი ორი წერტილიდან ამ წრფის პარალელურ წრფემდე მანძილები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ a და b პარალელური წრფეებია. a წრფეზე ავიღოთ ნებისმიერად ორი A და B წერტილი. A და B წერტილებიდან b წრფეზე დაუშვათ AC და BD



ნახ. 32

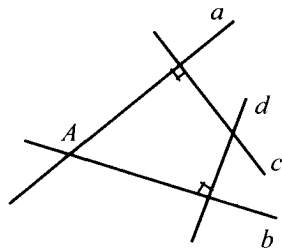
პერპენდიკულარები (ნახ. 32). C წერტილი შეკავართოთ B წერტილთან. $\angle ABC = \angle DCB$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები. ABC და DCB მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია (თეორემა 6.1). გამომდინარე აქედან $AC = BD$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, წრფის ყველა წერტილი ამ წრფის პარალელური წრფიდან ერთნაირადაა დაშორებული. მანძილი პარალელურ წრფეებს შორის ეწოდება მანძილს ერთ-ერთი წრფის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე წრფემდე.

თეორემა 6.7. თუ ორი წრფე იკვეთება და თითოეული მათგანისადმი გავლებულია მისი პერპენდიკულარული წრფე, მაშინ ეს ორი წრფეც იკვეთება.

დამტკიცება. ვთქვათ a და b წრფეები იკვეთებიან A წერტილში და $c \perp a$, $d \perp b$ (ნახ. 33).

თუ დავუშვებთ, რომ c და d წრფეები პარალელურია ან ერთმანეთს ემთხვევიან, მაშინ ცხადია $a \perp d$. რადგან პირობის ძალით $b \perp d$. მივიღეთ, რომ A წერტილიდან d წრფისადმი გავლებულია ორი პერპენდიკულარული a და b წრფე, რაც 6.5 თეორემას ეწინააღმდეგება. ე. ი. c და d წრფეები იკვეთებიან. თეორემა დამტკიცებულია.



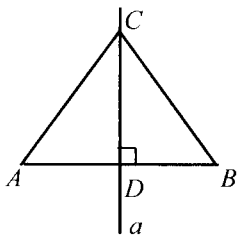
ნახ. 33

§7. მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარი. კუთხის ბისექტრისის თვისება

განსაზღვრება. მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარი (შუამართობი) ეწოდება ამ მონაკვეთის შუაწერტილზე გამავალ მის პერპენდიკულარულ წრფეს.

თეორემა 7.1. მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ამ მონაკვეთის ბოლოებიდან.

დამტკიცება. ვთქვათ a წრფე AB მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარია, ხოლო C მასზე მდებარე რაიმე წერტილი (ნახ. 34). თუ C წერტილი ემთხვევა AB მონაკვეთის D შუაწერტილს, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია. ვთქვათ C და D წერტილები არ ემთხვევიან. $\triangle ACD = \triangle BCD$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, რადგან CD გვერდი საერთოა, $AD = DB$ და $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$ პირობის ძალით. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან



ნახ. 34

გამომდინარეობს, რომ $AC = BC$. თეორემა დამტკიცებულია.

დავაშტკიცოთ ახლა ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა.

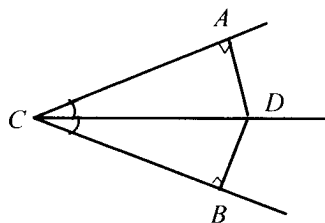
თეორემა 7.2. მონაკვეთის ბოლოებიდან თანაბრად დაშორებული ნებისმიერი წერტილი ამ მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარზე მდებარეობს.

დამტკიცება. ვთქვათ C წერტილი თანაბრადაა დაშორებული AB მონაკვეთის ბოლოებიდან. თუ C წერტილი მდებარეობს AB მონაკვეთზე, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია.

ვთქვათ C წერტილი არ მდებარეობს AB მონაკვეთზე (ნახ. 34). C წერტილსა და AB მონაკვეთის D შუაწერტილზე გაავლოთ a წრფე. რადგან $\triangle ACB$ ტოლფერდა სამკუთხედის CD მედიანა ამავე დროს სიმაღლეცაა, ამიტომ a წრფე წარმოადგენს AB მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარს. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 7.3. გაშლილ კუთხეზე ნაკლები კუთხის ბისექტრისის ნებისმიერი წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ამ კუთხის გვერდებიდან.

დამტკიცება. ვთქვათ D არის C კუთხის ბისექტრისის რაიმე წერტილი (ნახ. 35). D წერტილიდან კუთხის გვერდებისადმი გავავლოთ DA და DB მართობები. $\triangle CAD = \triangle CBD$ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად (ჰიპოტენუზითა და მახვილი კუთხით). ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AD = BD$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 35

დავამტკიცოთ ახლა ამ თეორემის შებრუნებული თეორემა.

თეორემა 7.4. თუ წერტილი თანაბრადაა დაშორებული კუთხეზე ნაკლები კუთხის გვერდებიდან, მაშინ ის ამ კუთხის ბისექტრისაზე მდებარეობს.

დამტკიცება. ვთქვათ D წერტილი თანაბრადაა დაშორებული ACB კუთხის a და b გვერდებიდან, ე. ი. $DA \perp a$, $DB \perp b$ და $AD = BD$ (ნახ. 35). $\triangle CAD = \triangle CBD$ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად (ჰიპოტენუზითა და კათეტით). ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ACD = \angle BCD$. თეორემა დამტკიცებულია.

ამრიგად, როგორც მონაკვეთის შუამართობი, ასევე კუთხის ბისექტრისა წარმოადგენენ ისეთ ფიგურებს, რომელთა ყველა წერტილს გარკვეული საერთო თვისება გააჩნია. საზოგადოდ ფიგურას, რომელიც სიბრტყის ყველა იმ წერტილისაგან შედგება, რომლებსაც გარკვეული საერთო თვისება აქვთ, წერტილთა გეომეტრიული ადგილი ეწოდება. ამ განსაზღვრების თანახმად ზემოთ დამტკიცებული თეორემები შემდეგნაირად შეიძლება ჩამოყალიბდეს:

ორი მოცემული წერტილიდან ტოლად დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი არის ამ წერტილების შუამართობი მონაკვეთის შუამართობი.

გაშლილ კუთხეზე ნაკლები კუთხის გვერდებიდან ტოლად დაშორებულ წერტილთა გეომეტრიული ადგილი არის ამ კუთხის ბისექტრისა.

§8. წრეწირი. სამკუთხედზე შემოხაზული და სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი

განსაზღვრება. წრეწირი ეწოდება ფიგურას შედგენილს სიბრტყის ყველა იმ წერტილისაგან, რომლებიც თანაბრად არიან დაშორებული მოცემული წერტილიდან. ამ წერტილს წრეწირის ცენტრი ეწოდება.

წრეწირის წერტილის ცენტრთან შემაერთებელ მონაკვეთს რადიუსი ეწოდება. წრეწირის ნებისმიერი ორი წერტილის შემაერთებელ მონაკვეთს ქორდა ეწოდება. ცენტრზე გამავალ ქორდას დიამეტრი ეწოდება.

წრეწირის ორ წერტილზე გამავალი წრფის მიმართ თითოეულ ნახევარსიბრტყეში მოთავსებულ წრეწირის ნაწილს რკალი ეწოდება.

ამრიგად, წრეწირი მისი ნებისმიერი ორი წერტილით იყოფა ორ რკალად. ამბობენ, რომ ამ წერტილების შემაერთებელი ქორდა ჭიმავს თითოეულ მათგანს, ხოლო ამ რკალებს დამატებითი რკალები ეწოდება.

წრეწირს სამკუთხედზე შემოხაზული ეწოდება, თუ იგი ამ სამკუთხედის სამივე წვეროზე გადის.

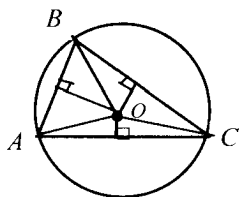
თეორემა 8.1. ნებისმიერი სამკუთხედისათვის არსებობს მასზე შემოხაზული წრეწირი. იგი ერთადერთია და მისი ცენტრი ამ სამკუთხედის გვერდების შუამართობების გადაკვეთის წერტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC სამკუთხედი. 6.7 თეორემის ძალით AB და AC გვერდების შუამართობები იკვეთებიან რაიმე O წერტილში (ნახ. 36). რადგან O წერტილი მდებარეობს, როგორც AB მონაკვეთის ასევე AC მონაკვეთის შუამართობზე, ამიტომ $OA=OB$ და $OA=OC$, საიდანაც

$$OA=OB=OC.$$

ამრიგად ABC სამკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა, რომლის ცენტრსაც O წერტილი წარმოადგენს. რადგან $OB=OC$, ამიტომ BC მონაკვეთის შუამართობიც O წერტილზე გადის.

ცხადია, რომ ABC სამკუთხედზე შეიძლება ერთადერთი წრეწირის შემოხაზვა, რადგან A , B და C წერტილებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილი მდებარეობს AB და AC



ნახ. 36

მონაკვეთების შუამართობებზე ერთდროულად, ე. ი. მათი გადაკვეთის O წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

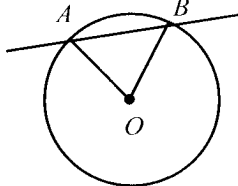
შედეგი. სამკუთხედის სამივე გვერდის შუამართობები ერთ წერტილში იკვეთება.

განსჯერება. წრეწირის წერტილზე ამ წერტილში გავლებული რადიუსის პერპენდიკულარულად გამავალ წრფეს წრეწირის მხები ეწოდება. აღნიშნულ წერტილს შეხების წერტილი ეწოდება.

თუ წრფე წარმოადგენს წრეწირის მხებს, მაშინ ამბობენ აგრეთვე, რომ წრეწირი ეხება აღნიშნულ წრფეს.

თეორემა 8.2. მხებს წრეწირთან აქვს ერთადერთი საერთო წერტილი.

დამტკიცება. ვთქვათ წრეწირის A წერტილზე გავლებულია მხები. დავუშვათ, რომ მხებს წრეწირთან აქვს A -სგან განსხვავებული საერთო B წერტილი (ნახ. 37).



ნახ. 37

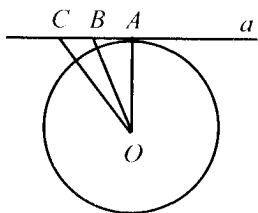
ცხადია, რომ B წერტილი არ ძეგს OA წრფეზე, რადგან ამ შემთხვევაში AB და OA პერპენდიკულარული წრფეები ერთმანეთს დაემთხვევიან, რაც შეუძლებელია.

რადგან AB წარმოადგენს A წერტილზე გამავალ მხებს, ამიტომ $\angle OAB = 90^\circ$. $\triangle AOB$ ტოლფერდაა, რადგან $OA = OB$. ამიტომ $\angle OBA = \angle OAB = 90^\circ$, რაც შეუძლებელია, რადგან სამკუთხედს შეიძლება ჰქონდეს

მხოლოდ ერთი მართი კუთხე. ე. ი. დაშვება, რომ მხებს წრეწირთან აქვს A -სგან განსხვავებული საერთო წერტილი არასწორია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 8.3 (თეორემა 8.2-ის შეტრუნებული). თუ წრფეს წრეწირთან მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი აქვს, მაშინ იგი წრეწირის მხებია.

დამტკიცება. ვთქვათ a წრფეს წრეწირთან აქვს ერთადერთი საერთო A წერტილი (ნახ. 38). დავუშვათ, რომ a წრფე არ



ნახ. 38

წარმოადგენს წრეწირის მხებს A წერტილში. ე. ი. OA არ არის a წრფის მართობი. O წერტილიდან a წრფეზე დავუშვათ OB პერპენდიკულარი, AB -ს გაგრძელებაზე გადავლით AB -ს ტოლი BC მონაკვეთი და O წერტილი შევკერთოთ C წერტილთან. $\triangle AOC$ სამკუთხედში OB წარმოადგენს როგორც მედიანას ასევე სიმაღლეს, ამიტომ $\triangle AOC$

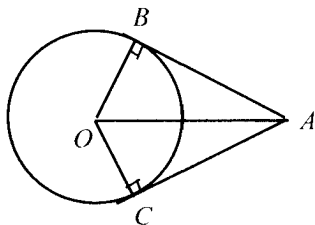
ტოლფერდაა (თეორემა 5.4). ე. ი. $OC=OA$. მივიღოთ, რომ C წერტილი წრეწირზე მდებარეობს, რაც იმას ნიშნავს, რომ a წრფეს წრეწირთან აქვს მეორე საერთო წერტილიც. ეს კი თეორემის პირობას ეწინააღმდეგება. ე. ი. a წარმოადგენს მხეხს. თეორემა დამტკიცებულია.

შევნიშნოთ, რომ წრფეს წრეწირთან ან არა აქვს საერთო წერტილი, ან აქვს ერთადერთი საერთო წერტილი, ან კვეთს მას ორ წერტილში. უკანასკნელ შემთხვევაში წრფეს წრეწირის მკვეთი ეწოდება.

მოცემული წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მხეხების მონაკვეთი ეწოდება მონაკვეთს ამ წერტილიდან მხეხების წერტილამდე.

თეორემა 8.4. მოცემული წერტილიდან ერთიანიძავე წრეწირისადმი გავლებული მხეხების მონაკვეთები ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ AB და AC მხეხების მონაკვეთებია (ნახ. 39). O ცენტრი შევაერთოთ A , B და C წერტილებთან. რადგან $AB \perp OB$ და $AC \perp OC$, ამიტომ ABO და ACO სამკუთხედები მართკუთხაა. $\triangle ABO = \triangle ACO$ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად (ჰიპოტენუსითა და კათეტით). ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AB=AC$. თეორემა დამტკიცებულია.

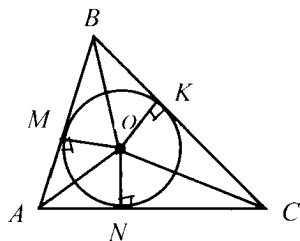


ნახ. 39

წრეწირს სამკუთხედში ნახაზული ეწოდება, თუ იგი ამ სამკუთხედის სამივე გვერდს ეხება.

თეორემა 8.5. ნებისმიერი სამკუთხედისათვის არსებობს მასში ნახაზული წრეწირი. იგი ერთადერთია და მისი ცენტრი ამ სამკუთხედის ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ O არის ABC სამკუთხედის A და B კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 40). O წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებზე დავეშვათ OM , ON და OK მართობები. რადგან AO და BO ბისექტრისებია, ამიტომ $OM=ON$ და $OM=OK$ (თეორემა 7.3), საიდანაც $OM=ON=OK$.



ნახ. 40

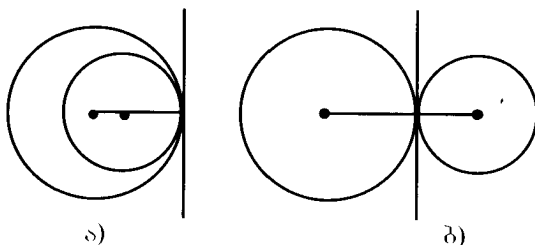
ამრიგად, ABC სამკუთხედში შეიძლება წრეწირის ნახაზა, რომლის ცენტრსაც O წერტილი წარმოადგენს.

რადგან $ON=OK$, ამიტომ C კუთხის ბისექტრისაც O წერტილზე გადის.

ცხადია, რომ ABC სამკუთხედში შეიძლება ერთადერთი წრეწირის ჩახაზვა, რადგან AB , BC და AC გვერდებიდან თანაბრად დაშორებული წერტილი მდებარეობს A და B კუთხის ბისექტრისებზე ერთდროულად, ე. ი. მათი გადაკვეთის O წერტილში. თეორემა დამტკიცებულია.

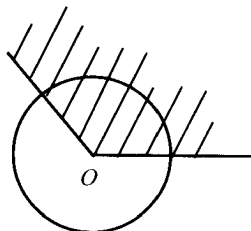
შედეგი. სამკუთხედის სამივე კუთხის ბისექტრისები ერთ წერტილში იკვეთება.

ამბობენ, რომ საერთო წერტილის მქონე ორი წრეწირი ერთმანეთს ეხება, თუ მათ ამ წერტილში საერთო მხები აქვთ (ნახ. 41). წრეწირების შეხებას შიგა შეხება ეწოდება, თუ წრეწირების ცენტრები მათი საერთო მხების მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს (ნახ. 41,ა)). წრეწირების შეხებას გარე შეხება ეწოდება, თუ წრეწირების ცენტრები მათი საერთო მხების მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს (ნახ.41,ბ)).



ნახ. 41

§9. ცენტრალური და ჩახაზული კუთხეები



ნახ. 42

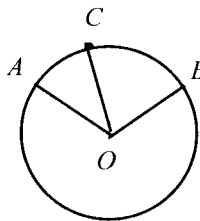
განსაზღვრება. წრეწირის ცენტრალური კუთხე ეწოდება კუთხეს წვეროთი წრეწირის ცენტრში.

განსაზღვრება. ცენტრალური კუთხის შიგნით მოთავსებულ წრეწირის რკალს ამ ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალი ეწოდება (ნახ. 42).

წრეწირის რკალის გრადუსული ზომა ეწოდება შესაბამისი ცენტრალური კუთხის გრადუსულ ზომას.

AOB ცენტრალური კუთხის შესაბამისი რკალის გრადუსული ზომა $\overset{\frown}{AB}$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ზოგჯერ რკალის გრადუსულ ზომას სამი ასოთიც აღნიშნავენ. მაგალითად, იგივე რკალი ასეც შეიძლება აღვნიშნოთ ACB , სადაც C რკალის რაიმე წერტილია (ნახ. 43).

რკალს, რომელიც 180° -იან ცენტრალურ კუთხეს შეესაბამება, ნახევარწრეწირი ეწოდება.



ნახ. 43

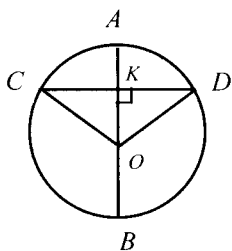
ვთქვათ AB რკალი C წერტილით გაყოფილია AC და CB რკალებად (ნახ. 43). რადგან AC და CB რკალების შესაბამისი AOC და COB ცენტრალური კუთხეების გრადუსულ ზომათა ჯამი უდრის AB რკალის შესაბამისი AOB ცენტრალური კუთხის გრადუსულ ზომას, ამიტომ

ცხადია, რომ $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$.

შევნიშნოთ, რომ დამატებითი რკალების გრადუსულ ზომათა ჯამი 360° -ის ტოლია.

თეორემა 9.1. ქორდის მართობული დიამეტრი ქორდასა და მის მიერ მოჭიმულ რკალებს შუაზე ყოფს.

დამტკიცება. ვთქვათ AB დიამეტრი CD ქორდის მართობულია (ნახ. 44). O ცენტრი შევეერთოთ C და D წერტილებთან. $\triangle COD$



ნახ. 44

ტოლფერდაა, ამიტომ OK სიმაღლე მედიანაცაა და ბისექტრისაც.

რადგან OK მედიანაა, $CK=KD$, ე. ი. AB დიამეტრი CD ქორდას შუაზე ყოფს.

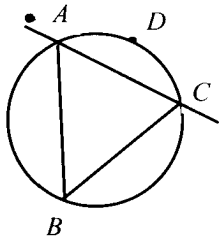
რადგან OK ბისექტრისაა, ამიტომ

$\angle COA = \angle DOA$. ე. ი. $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AD}$, როგორც ტოლი ცენტრალური კუთხეების შესაბამისი რკალები.

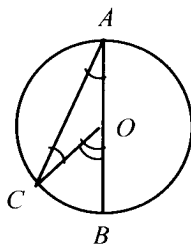
ცხადია, რომ $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DB}$ როგორც CA და AD ტოლი რკალების ნახევარწრეწირამდე შემავსებელი რკალები. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. კუთხეს, რომლის წვერო წრეწირზე მდებარეობს, ხოლო გვერდები კუთხის მას, ამ წრეწირში ნახაზული კუთხე ეწოდება.

განსაზღვრება. ვიტყვი, რომ ABC ნახაზული კუთხე ეყრდნობა ADC რკალს, თუ B და D წერტილები მდებარეობენ AC წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში (ნახ. 45).



ნახ. 45



ნახ. 46

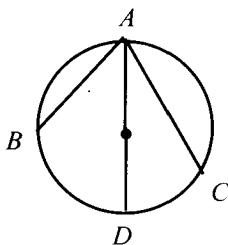
თეორემა 9.2. ნახაზული კუთხის გრადუსული ზომა უდრის იმ რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს, რომელსაც ეს კუთხე ეყრდნობა.

დამტკიცება. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1) ვთქვათ დიამეტრის შემცველი სხივი ემთხვევა ნახაზული კუთხის გვერდს (ნახ. 46). $\triangle AOC$ ტოლფერდაა. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების თანახმად $\angle COB = \angle A + \angle C = 2\angle A$, საიდანაც

$$\angle A = \frac{1}{2} \angle COB.$$

რადგან COB ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა უდრის CB რკალის გრადუსულ ზომას, ამიტომ A კუთხის გრადუსული ზომა უდრის CB რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს.



ნახ. 47

2) ვთქვათ დიამეტრის შემცველი სხივი გადის ნახაზული კუთხის გვერდებს შორის (ნახ. 47). III_2 აქსიომის თანახმად

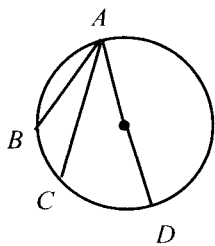
$$\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD.$$

პირველი შემთხვევის თანახმად BAD და CAD კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად BD და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია.

რადგან $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD}$ ამიტომ BAC

კუთხის გრადუსული ზომა უდრის იმ BC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს, რომელსაც ეს კუთხე ეყრდნობა.

3) ვთქვათ დიამეტრის შემცველი სხივი არ გადის ნახაზული კუთხის გვერდებს შორის. მაშინ ნახაზული კუთხის ერთ-ერთი გვერდი გადის დიამეტრის შემცველი სხივითა და მეორე



ნახ. 48

გვერდით შედგენილი კუთხის გვერდებს შორის. ვთქვათ ეს გვერდია AC (ნახ. 48). III₂ აქსიომის თანახმად $\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC$, საიდანაც

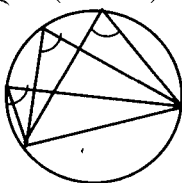
$$\angle BAC = \angle BAD - \angle DAC.$$

პირველი შემთხვევის თანახმად BAD და DAC კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად BD და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია.

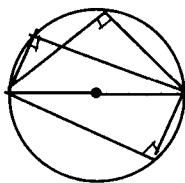
რადგან $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CD}$, ამიტომ BAC კუთხის გრადუსული ზომა უდრის იმ BC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს, რომელსაც ეს კუთხე ეყრდნობა. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი შედეგები:

შედეგი 1. ერთიდაიმავე რკალზე დაყრდნობილი ნახაზული კუთხეები ტოლია (ნახ. 49).



ნახ. 49

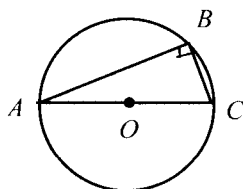


ნახ. 50

შედეგი 2. თუ ნახაზული კუთხე ეყრდნობა დიამეტრით მოჭიმულ რკალს, მაშინ ასეთი ნახაზული კუთხე მართია (ნახ. 50).

თეორემა 9.3. მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი ჰიპოტენუზის შუაწერტილია.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC მართკუთხა სამკუთხედზე ($\angle B = 90^\circ$) შემოხაზულია წრეწირი (ნახ. 51). რადგან B ნახაზული კუთხე მართია, ამიტომ რკალი, რომელსაც იგი ეყრდნობა, ნახევარწრეწირია, ე. ი. AC დიამეტრია და $AO = OC$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 51

შედეგი. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გავლებული მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია.

შევნიშნოთ, რომ მახვილკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი მდებარეობს სამკუთხედის შიგნით, ხოლო

ბლაგვეუთხა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი – სამკუთხედის გარეთ.

§10. მხეებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე. კუთხე წვეროთი წრეწირის შიგნით და წრეწირის გარეთ

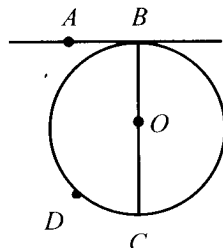
მხეებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომლის წვერო შეხების წერტილშია, ერთი გვერდი წარმოადგენს მხების ნაწილს, ხოლო მეორე შეიცავს ქორდას.

მხეებითა და ქორდით შედგენილი კუთხის გვერდებს შორის მოთავსებული რკალი ეწოდება ქორდის მიერ მოჭიმულ იმ რკალს, რომელიც ამ კუთხეს ეკუთვნის.

თეორემა 10.1. მხეებითა და ქორდით შედგენილი კუთხის გრადუსული ზომა უდრის იმ რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს, რომელიც ამ კუთხის გვერდებს შორის არის მოთავსებული.

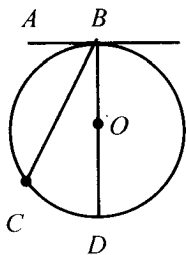
დამტკიცება. განვიხილოთ სამი შემთხვევა:

1) ვთქვათ მხეებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე მართია (ნახ. 52). ე. ი. $\angle ABC = 90^\circ$. მხების განსაზღვრების ძალით BC წარმოად-



ნახ. 52

გენს დიამეტრს, ამიტომ $\widehat{BDC} = 180^\circ$. ე. ი. $\widehat{ABC}$ კუთხის გრადუსული ზომა უდრის $\widehat{BDC}$ რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს.



ნახ. 53

2) ვთქვათ მხეებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე მახვილია (ნახ. 53). კუთხის წვეროზე გაავლოთ BD დიამეტრი. BC სხივი გადის ABD კუთხის გვერდებს შორის, ამიტომ

$$\angle ABC + \angle CBD = \angle ABD,$$

საიდანაც

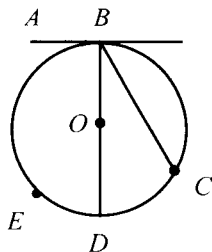
$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD.$$

$\widehat{ABD}$ და $\widehat{CBD}$ კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად $\widehat{BCD}$ და $\widehat{CD}$ რკალების გრადუსული

ზომების ნახევრის ტოლია. რადგან $\widehat{BC} = \widehat{BCD} - \widehat{CD}$, ამიტომ $\widehat{ABC}$ კუთხის გრადუსული ზომა უდრის $\widehat{BC}$ რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს.

3) ვთქვათ მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე ბლაგვია (ნახ. 54). კუთხის წვეროზე გავავლოთ BD დიამეტრი. BD სხივი გადის ABC კუთხის გვერდებს შორის, ამიტომ $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$.

ABD და CBD კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად BED და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია.

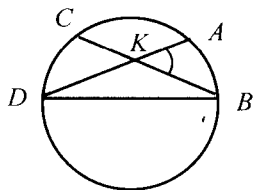


ნახ. 54

რადგან $BDC = BED + CD$, ამიტომ ABC კუთხის გრადუსული ზომა უდრის BDC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10.2. იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის წვერო წრეწირის შიგნითაა, უდრის მოცემული კუთხისა და მისი ვერტიკალური კუთხის გვერდებს შორის მოთავსებული რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარჯამს.

დამტკიცება. ვთქვათ AKB კუთხის წვერო წრეწირის შიგნითაა, ხოლო CKD მისი ვერტიკალური კუთხეა (ნახ. 55). გავავლოთ BD ქორდა. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების ძალით $\angle AKB = \angle D + \angle B$.



ნახ. 55

D და B ნახაზული კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად AB და CD რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია, ამიტომ AKB კუთხის გრადუსული ზომა უდრის AB და CD

რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარჯამს. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10.3. იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის წვერო წრეწირის გარეთაა, ხოლო გვერდები წრეწირს კვეთენ, უდრის კუთხის გვერდებს შორის მოთავსებული რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარსხეობას.

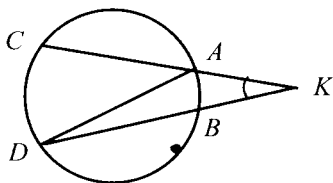
დამტკიცება. ვთქვათ K კუთხის წვერო წრეწირის გარეთაა, ხოლო კუთხის გვერდები წრეწირს კვეთენ A , C , B და D წერტილებში (ნახ. 56). გავავლოთ AD ქორდა. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების ძალით

$$\angle CAD = \angle K + \angle D.$$

საიდანაც

$$\angle K = \angle CAD - \angle D.$$

CAD და D ნახაზული

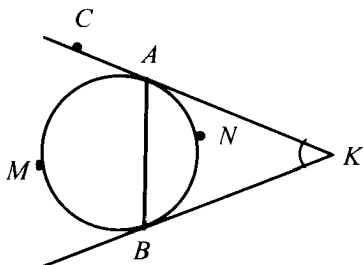


ნახ. 56

კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად CD და AB რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია. ამიტომ K კუთხის გრადუსული ზომა უდრის CD და AB რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარსხვაობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 10.4. იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის გვერდები წრეწირს ეხებიან, უდრის იმ რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარსხვაობას, რომლებაც წრეწირი იყოფა შეხების წერტილებით.

დამტკიცება. ვთქვათ K კუთხის გვერდები წრეწირს ეხებიან A და B წერტილებში (ნახ. 57). გავავლოთ AB ქორდა. სამკუთხედის გარე კუთხის თვისების ძალით



ნახ. 57

$$\angle CAB = \angle K + \angle ABK,$$

საიდანაც

$$\angle K = \angle CAB - \angle ABK.$$

CAB და ABK მსებოთა და ქორდით შედგენილი კუთხეების გრადუსული ზომები შესაბამისად AMB და ANB რკალების გრადუსული ზომების ნახევრის ტოლია.

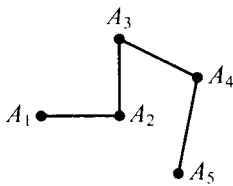
ამიტომ K კუთხის გრადუსული ზომა უდრის AMB და ANB რკალების გრადუსულ ზომათა ნახევარსხვაობას. თეორემა დამტკიცებულია.

§11. მრავალკუთხედები

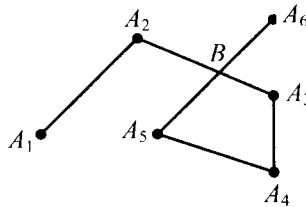
განსაზღვრება. $A_1A_2A_3...A_n$ ტეხილი ეწოდება ფიგურას, რომელიც $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ წერტილების შემაერთებელი $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ მონაკვეთებისაგან შედგება. $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ წერტილებს ტეხილის წვეროები ეწოდება, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ მონაკვეთებს კი ტეხილის გვერდები ეწოდება (იგულისხმება, რომ მესობელი გვერდები ერთ წრფეზე არ მდებარეობს).

თუ ტეხილი თავის თავს არ გადაკვეთს, მაშინ მას მარტივი ტეხილი ეწოდება. 58-ე ნახაზზე მოცემულია მარტივი ტეხილი, 59-ე ნახაზზე კი – ტეხილი, რომელიც თავის თავს გადაკვეთს

(*B* წერტილში). ტეხილის სიგრძე ეწოდება მისი გვერდების სიგრძეთა ჯამს.



ნახ. 58

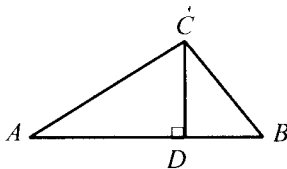


ნახ. 59

თეორემა 11.1 (სამკუთხედის უტოლობა). ნებისმიერი სამი წერტილისათვის ორ მათგანს შორის მანძილი ამ წერტილებიდან მესამე წერტილამდე მანძილების ჯამს არ აღემატება.

დამტკიცება. ვთქვათ, A , B , C მოცემული სამი წერტილია. თუ სამივე წერტილი ერთ წრფეზე მდებარეობს, მაშინ ერთ-ერთი მათგანი (მაგალითად B) დანარჩენ ორს შორის მდებარეობს. ამ შემთხვევაში $AB+BC=AC$. აქედან ჩანს, რომ სამი მანძილიდან თითოეული დანარჩენი ორის ჯამს არ აღემატება.

დავუშვათ ახლა, რომ სამივე წერტილი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს და დავამტკიცოთ, რომ $AB < AC + BC$, სადაც AB



ნახ. 60

უდიდესი გვერდია (ნახ. 60). AB წრფეზე დავუშვათ CD მართობი. რადგან მართკუთხა სამკუთხედში კათეტი ჰიპოტენუზაზე ნაკლებია, ამიტომ $AD < AC$, $BD < BC$.

რადგან $AB = AD + BD$, ამიტომ $AB < AC + BC$. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. ყოველ სამკუთხედში თითოეული გვერდი ნაკლებია დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე და მეტია მათ სხვაობაზე.

თეორემა 11.2. ტეხილის სიგრძე მის ბოლოებს შორის მანძილზე მეტია.

დამტკიცება. ვთქვათ $A_1A_2A_3...A_n$ მოცემული ტეხილია. სამკუთხედის უტოლობის ძალით

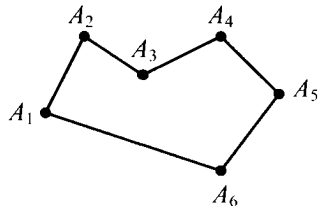
$$\begin{aligned} A_1A_3 &< A_1A_2 + A_2A_3 \\ A_1A_4 &\leq A_1A_3 + A_3A_4 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 \end{aligned}$$

$$A_1A_n \leq A_1A_{n-1} + A_{n-1}A_n < A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$$

თეორემა დამტკიცებულია.

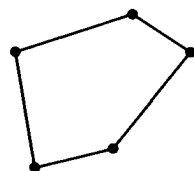
ტეხილს ეწოდება შეკრული, თუ მისი ბოლოები ერთმანეთს ემთხვევა.

განსაზღვრება. მარტივი შეკრული ტეხილით შემოსაზღვრულ სიბრტეის ნაწილს თვით ამ ტეხილის ჩათვლით მრავალკუთხედი ეწოდება (ნახ. 61). ტეხილის წვეროებს მრავალკუთხედის წვეროები ეწოდება, ტეხილის გვერდებს კი — მრავალკუთხედის გვერდები, ხოლო თვით ტეხილს მრავალკუთხედის საზღვარი ეწოდება.



ნახ. 61

მრავალკუთხედს ამოზნექილი ეწოდება, თუ იგი მისი ნებისმიერი გვერდის შემცველი წრფის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტეკში მდებარეობს. 62-ე ნახაზზე გამოსახულია ამოზნექილი მრავალკუთხედი, 61-ე ნახაზზე კი — არამოზნექილი მრავალკუთხედი.



ნახ. 62

ჩვენ შემდგომში მხოლოდ ამოზნექილ მრავალკუთხედებს განვიხილავთ.

მრავალკუთხედის ყველა გვერდის სიგრძეთა ჯამს მრავალკუთხედის პერიმეტრი ეწოდება.

მრავალკუთხედის წვეროებს მეზობელი წვეროები ეწოდება, თუ ისინი ერთიდაიმავე გვერდის ბოლოებია. წვეროებს, რომლებიც მეზობელი წვეროები არაა, არამეზობელი წვეროები ეწოდება. მრავალკუთხედის გვერდებს, რომლებიც ერთი წვეროდან გამოდიან, მეზობელი გვერდები ეწოდება.

მრავალკუთხედის არამეზობელი ორი წვეროს შემაერთებელ მონაკვეთს, დიაგონალი ეწოდება. მრავალკუთხედს, რომელსაც n წვერო და მაშასადამე, n გვერდი აქვს, n -კუთხედი ეწოდება.

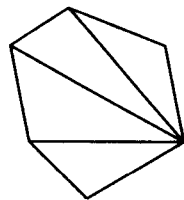
ცხადია, რომ n -კუთხედის თითოეული წვეროდან შესაძლებელია $n-3$ დიაგონალის გავლება, n წვეროდან კი $n-2$ დიაგონალი გადის, ანუ $n(n-3)/2$ დიაგონალია.

რაოდენობაა $\frac{n(n-3)}{2}$.

მრავალკუთხედის მოცემულ წვეროსთან მდებარე კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომელსაც ამ წვეროდან გამოსული გვერდების შემცველი სხივები ქმნის.

თეორემა 11.3. ამოზნექილი n -კუთხედის კუთხეთა ჯამი არის $180^\circ (n-2)$.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ამოხსნილი n -კუთხედი. მისი ერთ-ერთი წვეროდან გავავლოთ ყველა შესაძლო დიაგონალი (ნახ. 63) მივიღებთ $n-2$ სამკუთხედს. ცხადია, რომ მოცემული მრავალკუთხედის კუთხეების ჯამი უდრის მიღებული სამკუთხედების ყველა კუთხეების ჯამს. რადგან სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180° -ია, ამიტომ n -კუთხედის კუთხეების ჯამი $180^\circ (n-2)$ -ის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 63

შეგნიშნოთ, რომ ოთხკუთხედის კუთხეების ჯამი 360° -ის ტოლია.

განსაზღვრება. ამოხსნილი მრავალკუთხედის მოცემულ წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე ეწოდება კუთხეს, რომელიც მრავალკუთხედის ამ წვეროსთან მდებარე კუთხის მოსაზღვრეა.

იმისათვის, რომ მრავალკუთხედის რომელიმე წვეროსთან მდებარე კუთხე ამავე წვეროსთან მდებარე გარე კუთხეში არ აგვერიოს, მას შიგა კუთხესაც უწოდებენ.

შეგნიშნოთ, რომ მრავალკუთხედის თითოეულ წვეროსთან მდებარეობს ორი გარე კუთხე, რომლებიც ერთმანეთის ტოლია, როგორც ვერტიკალური კუთხეები.

თეორემა 11.4. მრავალკუთხედის თითოეულ წვეროსთან თითო-თითოდ აღებული გარე კუთხეების ჯამი 360° -ის ტოლია.

დამტკიცება. მრავალკუთხედის შიგა კუთხის და მისი მოსაზღვრე გარე კუთხის ჯამი 180° -ია, ამიტომ ყველა შიგა და გარე კუთხეთა ჯამი უდრის $180^\circ \cdot n$ -ს, მაგრამ თეორემა 11.3-ის თანახმად ყველა შიგა კუთხის ჯამი უდრის $180^\circ \cdot (n-2)$. მაშასადამე, თითოეულ წვეროსთან თითო-თითოდ აღებულ გარე კუთხეთა ჯამი უდრის $180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n-2) = 360^\circ$. თეორემა დამტკიცებულია.

§12. ოთხკუთხედები

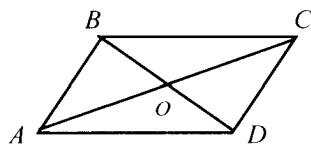
I. პარალელოგრამი

განსაზღვრება. ოთხკუთხედს, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია, პარალელოგრამი ეწოდება.

პარალელოგრამის გვერდის ნებისმიერი წერტილიდან მოპირდაპირე გვერდის შემცველ წრფეზე დაშვებულ მართობს პარალელოგრამის სიმაღლე ეწოდება.

თეორემა 12.1. თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები • გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $ABCD$ მოცემული ოთხკუთხედი და O – მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 64). $\triangle ABO = \triangle CDO$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, რადგან $AO = CO$ და $BO = DO$ პირობის თანახმად, ხოლო

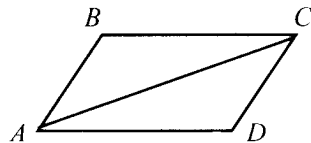


ნახ. 64

$\angle AOB = \angle COD$ როგორც ვერტიკალური კუთხეები. მაშასადამე, $\angle OAB = \angle OCD$. ეს კუთხეები კი შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია AB და CD წრფეებსა და AC მკვეთს შორის. ამიტომ $AB \parallel CD$ (თეორემა 4.3). ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $BC \parallel AD$. ე.ი. $ABCD$ პარალელოგრამია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12.2. თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული ოთხკუთხედი (ნახ. 65).



ნახ. 65

$\triangle ABC = \triangle CDA$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად, რადგან $AB = CD$ და $BC = DA$ პირობის თანახმად, ხოლო AC გვერდი საერთოა. მაშასადამე, $\angle BAC = \angle DCA$. ეს კუთხეები კი შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია AB და CD წრფეებსა და AC მკვეთს შორის. ამიტომ $AB \parallel CD$ (თეორემა 4.3). ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $BC \parallel AD$. ე.ი. $ABCD$ პარალელოგრამია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12.3. თუ ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე გვერდი ტოლია და პარალელური, მაშინ ეს ოთხკუთხედი პარალელოგრამია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედში $AB = CD$ და $AB \parallel CD$ (ნახ. 65). $\triangle ABC = \triangle CDA$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, რადგან $AB = CD$ პირობის თანახმად, AC გვერდი საერთოა, ხოლო $\angle BAC = \angle DCA$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები AB და CD პარალელურ წრფეებსა და AC მკვეთს შორის. მაშასადამე, $\angle BCA = \angle DAC$. ეს კუთხეები კი შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეებია BC და AD წრფეებსა და AC მკვეთს შორის. ამიტომ $BC \parallel AD$. ე.ი. $ABCD$ პარალელოგრამია. თეორემა დამტკიცებულია.

დამტკიცებული თეორემები (12.1, 12.2 და 12.3) პარალელოგრამის ნიშნებს წარმოადგენენ.

თეორემა 12.4. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ერთმანეთის ტოლია, მოპირდაპირე კუთხეები ტოლია, ხოლო ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180° -ია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ.65). $\triangle ABC = \triangle CDA$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად, რადგან AC გვერდი საერთოა, $\angle BAC = \angle DCA$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები AB და CD პარალელურ წრფეებსა და AC მკვეთს შორის, ხოლო $\angle BCA = \angle DAC$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები BC და DA პარალელურ წრფეებსა და AC მკვეთს შორის. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

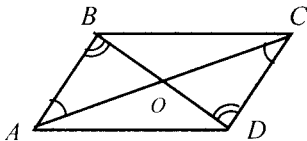
$$AB = CD, BC = DA, \angle B = \angle D \text{ და } \angle A = \angle C.$$

პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180° -ია, რადგან ისინი წარმოადგენენ ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებულ შიგა ცალმხრივ მდებარე კუთხეებს. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. თუ პარალელოგრამში გავლებულია დიაგონალი, მაშინ მიღებული სამკუთხედები ტოლია.

თეორემა 12.5 (თეორემა 12.1-ის შებრუნებული). პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ. 66). $\triangle ABO = \triangle CDO$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად, რადგან $AB = CD$, როგორც პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები (თეორემა 12.4), ხოლო $\angle BAO = \angle DCO$ და $\angle ABO = \angle CDO$, როგორც AB და CD პარალელური წრფეების AC და BD წრფეებით გადაკვეთისას მიღებული შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AO = CO$ და $BO = DO$. თეორემა დამტკიცებულია.



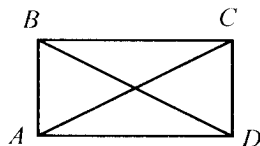
ნახ. 66

II. მართკუთხედი. რომბი. კვადრატო

განსაზღვრება. პარალელოგრამს, რომლის ყველა კუთხე მართია, მართკუთხედს ეწოდება.

თეორემა 12.6. მართკუთხედის დიაგონალები ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული მართკუთხედი (ნახ. 67). $\triangle ABD = \triangle DCA$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად, რადგან $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$, AD გვერდი საერთოა, ხოლო $AB = DC$, როგორც პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $AC = DB$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 67

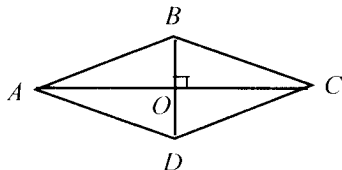
თეორემა 12.7 (თეორემა 12.6-ის შებრუნებული). თუ პარალელოგრამის დიაგონალები ტოლია, მაშინ ის მართკუთხედი.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ. 67). $\triangle ABD = \triangle DCA$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად, რადგან $AB = DC$, როგორც პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები, AD გვერდი საერთოა, ხოლო $BD = CA$ პირობის თანახმად. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle BAD = \angle CDA$. ამავე დროს $\angle BAD + \angle CDA = 180^\circ$, როგორც პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეები. ამიტომ $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$. ანალოგიურად ვახვეწებთ, რომ $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$. ე. ი. $ABCD$ მართკუთხედი. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. პარალელოგრამს, რომლის ყველა გვერდი ტოლია, რომბი ეწოდება.

თეორემა 12.8. რომბის დიაგონალები ურთიერთმართობულია. რომბის დიაგონალები მისი კუთხეების ბისექტრისებია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული რომბია და O – მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი (ნახ. 68). პარალელოგრამის თვისების თანახმად $AO = OC$. მაშასადამე, ტოლფერდა ABC სამკუთხედში BO მონაკვეთი მედიანაა. ტოლფერდა სამკუთხედის თვისების თანახმად მისი ფუძისადმი გაგზავნილი მედიანა სიმაღლეცაა და ბისექტრისაც. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ BD



ნახ. 68

დიაგონალი B კუთხის ბისექტრისაა და AC დიაგონალის მართობულია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12.9 (თეორემა 12.8-ის შეპრუნებული). თუ პარალელოგრამის დიაგონალი წარმოადგენს მისი კუთხის ბისექტრისას ან დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ ის რომბია.

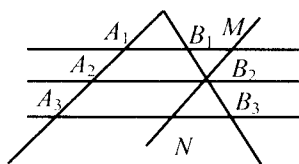
დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემა იმ შემთხვევაში, როდესაც პარალელოგრამის დიაგონალები ურთიერთმართობულია. როდესაც დიაგონალი წარმოადგენს კუთხის ბისექტრისას დამტკიცება ანალოგიურია. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული პარალელოგრამია (ნახ.68). $\triangle ABC$ ტოლფერდაა, რადგან, თუ $BD \perp AC$, მაშინ სიმაღლე და მედიანა ერთმანეთს ემთხვევა. მაშასადამე, $AB=BC$. აქედან გამომდინარე, $ABCD$ რომბია, რადგან პარალელოგრამის გვერდები ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

განხილვება. მართკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი ერთმანეთის ტოლია კვადრატი ეწოდება.

კვადრატი ამავე დროს რომბიცაა, ამიტომ მას მართკუთხედი-სა და რომბის ყველა თვისება აქვს.

III. თაღების თეორემა. სამკუთხედის შუამონაკვეთი

თეორემა 12.10 (თაღების თეორემა). თუ კუთხის გვერდების გადამკვეთი პარალელური წრფეები მის ერთ გვერდზე ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს, მაშინ ეს წრფეები მეორე გვერდზეც ტოლ მონაკვეთებს მოკვეთს.



ნახ. 69

დამტკიცება. ვთქვათ A_1, A_2, A_3 პარალელური წრფეების კუთხის ერთ გვერდთან გადაკვეთის წერტილებია და A_2 წერტილი A_1 -ს და A_3 -ს შორის მდებარეობს (ნახ. 69). ვთქვათ B_1, B_2, B_3 ამ წრფეების კუთხის მეორე გვერდთან გადაკვეთის შესაბამისი წერტილებია. დავამტკიცოთ, რომ თუ $A_1A_2=A_2A_3$,

მაშინ $B_1B_2=B_2B_3$.

B_2 წერტილზე გავავლოთ A_1A_3 წრფის პარალელური MN წრფე. პარალელოგრამის თვისების თანახმად $A_1A_2=MB_2$, $A_2A_3=B_2N$. რადგან $A_1A_2=A_2A_3$, ამიტომ $MB_2=B_2N$.

$\triangle B_2B_1M=\triangle B_2B_3N$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის მიხედვით, რადგან $B_2M=B_2N$ დამტკიცებულის თანახმად, $\angle B_1B_2M=\angle B_3B_2N$, როგორც ვერტიკალური კუთხეები, ხოლო $\angle B_2MB_1=\angle B_2NB_3$, როგორც შიგა ჯვარედინად მდებარე კუთხეები

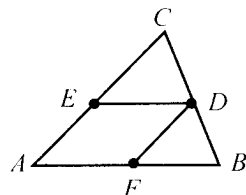
A_1B_1 და A_3B_3 პარალელურ წრფეებსა და MN მკვეთს შორის. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $B_1B_2=B_2B_3$. თეორემა დამტკიცებულია.

ვანსაზღვრება. სამკუთხედის შუამონაკვეთი ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც მისი ორი გვერდის შუაწერტილებს აერთებს.

თეორემა 12.11. სამკუთხედის შუამონაკვეთი მესამე გვერდის პარალელურია და მის ნახევარს უდრის.

დამტკიცება. ვთქვათ DE არის ABC სამკუთხედის შუამონაკვეთი (ნახ. 70). D წერტილზე გავავლოთ AB -ს პარალელური წრფე. თავისი თეორემის თანახმად იგი AC მონაკვეთს მის შუაწერტილში გადაკვეთს. თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ახლა გავავლოთ DF შუამონაკვეთი. იგი AC გვერდის პარალელურია. $AEDF$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია. პარალელოგრამის თვისების თანახმად $ED=AF$, ხოლო



ნახ. 70

რადგან $AF=FB$, ამიტომ $ED=\frac{1}{2}AB$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 12.12. სამკუთხედის ნებისმიერი ორი მედიანა გადაკვეთის წერტილით წვეროს მხრიდან იყოფა შეფარდებით 2:1.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC სამკუთხედის AN და CM მედიანები იკვეთებიან O წერტილში (ნახ. 71).

AO და CO მონაკვეთები D და E წერტილებით გავყოთ შუაზე. MN არის ABC სამკუთხედის შუამონაკვეთი, ამიტომ

$$MN \parallel AC \text{ და } MN = \frac{1}{2}AC.$$

ახვევ, DE არის AOC სამკუთხედის შუამონაკვეთი, ამიტომ

$$DE \parallel AC \text{ და } DE = \frac{1}{2}AC.$$

მაშასადამე

$$MN \parallel DE \text{ და } MN = DE,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ $MNED$ პარალელოგრამია (თეორემა 12.3). რადგან პარალელოგრამის დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფიან, ამიტომ

$$DO=ON.$$

აგების თანახმად

$$AD=DO.$$

ამრიგად, $AD=DO=ON$. მაშასადამე

$$AO:ON=2:1.$$

ანალოგიურად შეიძლება დამტკიცდეს, რომ

$$CO:OM=2:1.$$

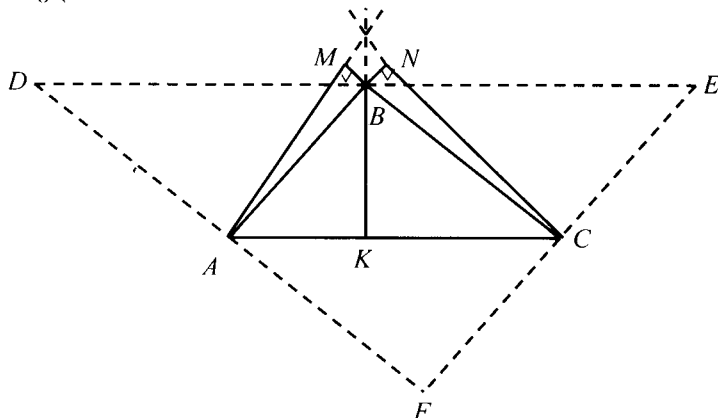
თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. სამკუთხედის სამივე მედიანა ერთ წერტილში იკვეთება.

სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილს სამკუთხედის ცენტრი ეწოდება.

თეორემა 12.13. სამკუთხედის სიმაღლეების შემცველი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთება.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ყოველ წვეროზე გავავლოთ მოპირდაპირე გვერდის პარალელური წრფე (ნახ. 72). მივიღებთ DEF სამკუთხედს.



ნახ. 72

რადგან $ADBC$ და $ABEC$ პარალელოგრამებია, ამიტომ $AC=DB$ და $AC=BE$, საიდანაც $DB=BE$. ანალოგიურად შეიძლება ვანეწოთ, რომ $DA=AF$ და $FC=CE$. ე. ი. DEF სამკუთხედის გვერდების შუამართობები შეიცავენ ABC სამკუთხედის სიმაღლეებს. გამომდინარე აქედან, თეორემა 8.1-ის შედეგის ძალით AM , BK და CN სიმაღლეების შემცველი წრფეები ერთ წერტილში იკვეთებიან. თეორემა დამტკიცებულია.

IV. ტრაპეცია. ტრაპეციის შუამონაკვეთი

განსაზღვრება. ოთხკუთხედს, რომლის ორი გვერდი პარალელურია, ხოლო ორი დანარჩენი გვერდი არ არის პარალელური ტრაპეცია ეწოდება (ნახ.73). ტრაპეციის პარალელურ გვერდებს მისი ფუძეები ეწოდება, ხოლო არაპარალელურ გვერდებს – ფერდები.



თუ ტრაპეციის ფერდები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ტრაპეციას ტოლფერდა ეწოდება. ტრაპეციას, რომლის ერთ-ერთი კუთხე მართია მართკუთხა ტრაპეცია ეწოდება.

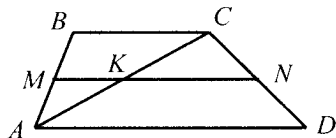
ნახ. 73

ტრაპეციის ერთ-ერთი ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე ფუძის შემცველ წრფეზე დაშვებულ მართობს, ტრაპეციის სიმაღლე ეწოდება.

განსაზღვრება. ტრაპეციის ფერდების შუაწერტილების შემაერთებულ მონაკვეთს ტრაპეციის შუამონაკვეთი ეწოდება.

თეორემა 12.14. ტრაპეციის შუამონაკვეთი ფუძეების პარალელურია და მათ ნახევარჯამს უდრის.

დამტკიცება. ვთქვათ MN არის $ABCD$ ტრაპეციის შუამონაკვეთი (ნახ. 74). M წერტილზე გავავლოთ ფუძეების პარალელური წრფე. თაღესის თეორემის თანახმად იგი CD ფერდს შუაწერტილში გადაკვეთს. თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.



ნახ. 74

თუ გავავლებთ AC დიაგონალს, მაშინ თაღესის თეორემის თანახმად მას MN მონაკვეთი შუაწერტილში გადაკვეთს, ე. ი. MK და KN შესაბამისად ABC და ACD სამკუთხედების შუამონაკვეთებია. გამომდინარე აქედან

$$MN = MK + KN = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AD = \frac{BC + AD}{2}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

V. ტოლფერდა ტრაპეციის თვისებები

1) ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხეები ტოლია.

ვთქვათ BM და CN წარმოადგენენ $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლეებს (ნახ. 75). $\triangle ABM = \triangle DCN$ მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნის თანახმად (ჰიპოტენუსითა და კათეტით). ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გვაქვს, რომ $\angle A = \angle D$ და $AM = DN$.

$$2) \ AM = \frac{AD - BC}{2}; \quad MD = \frac{AD + BC}{2}.$$

მართლაც $AM + MN + ND = AD$ (ნახ.75), საიდანაც $2AM = AD - MN =$
 $= AD - BC$, ე. ი. $AM = \frac{AD - BC}{2}$.

ნახაზიდან ჩანს, რომ $MD = AD - AM$. აქედან

$$MD = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

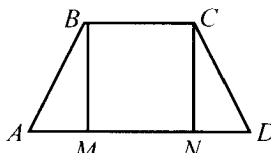
ამრიგად MD მონაკვეთი ტრაპეციის შუამონაკვეთის ტოლია.

3) ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ტოლია. დიაგონალების მიერ ფუძესთან შედგენილი კუთხეები ტოლია (ნახ. 76).

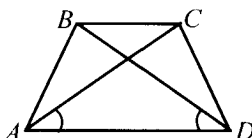
$\triangle ABD = \triangle DCA$ სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად. ამიტომ $AC = DB$ და $\angle CAD = \angle BDA$.

4) თუ ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალები ურთიერთმართობულია, მაშინ შუამონაკვეთი სიმაღლის ტოლია (ნახ. 77).

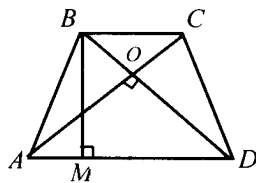
AOD მართკუთხა სამკუთხედში $\angle ODA = \angle OAD = 45^\circ$, ამიტომ BDM მართკუთხა სამკუთხედი ტოლფერდაა. ე. ი. $BM = MD$, საიდანაც 2) თვისების თანახმად BM სიმაღლე შუამონაკვეთის ტოლია.



ნახ. 75



ნახ. 76



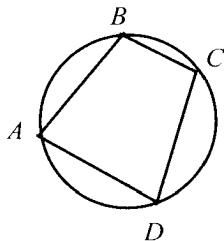
ნახ. 77

VI. ნახაზული და შემოხაზული ოთხკუთხედები

განსაზღვრება. ოთხკუთხედს, რომლის ყველა წვერო წრეწირზე მდებარეობს, წრეწირში ნახაზული ოთხკუთხედი ეწოდება, ხოლო წრეწირს – ოთხკუთხედზე შემოხაზული.

თეორემა 12.15. წრეწირში ნახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი 180° -ია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ წრეწირში ნახაზული ოთხკუთხედი (ნახ. 78). $\angle B$ და $\angle D$ ნახაზული კუთხეებია, ამიტომ B კუთხის გრადუსული ზომა უდრის ADC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს, ხოლო D კუთხის გრადუსული ზომა უდრის ABC რკალის გრადუსული ზომის ნახევარს. მაშასადამე, B და D კუთხეების ჯამი ADC და ABC რკალების გრადუსულ ზომათა ჯამის ნახევრის ტოლია. რადგან ეს რკალები დამატებით რკალეებია, ამიტომ მათი გრადუსულ ზომათა ჯამი 360° -ია, ე. ი.



ნახ. 78

$$\angle B + \angle D = 180^\circ.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. წრეწირში ნახაზული ყოველი ტრაპეცია ცოლფერ-დაა.

შედეგი 2. წრეწირში ნახაზული ყოველი პარალელოგრამი მართკუთხედი.

შედეგი 3. წრეწირში ნახაზული ყოველი რომბი კვადრატია.

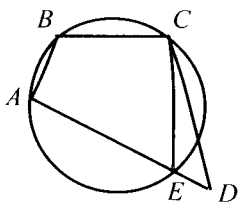
თეორემა 12.16 (თეორემა 12.15-ის შებრუნებული). თუ ოთხკუთხედის ორი მოპირდაპირე კუთხის ჯამი უდრის 180° -ს, მაშინ ასეთ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული ოთხკუთხედი, რომლისთვისაც

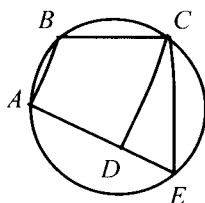
$$\angle B + \angle D = 180^\circ.$$

A , B და C წვეროებზე გავავლოთ წრეწირი და დავამტკიცოთ, რომ D წერტილიც წრეწირზე მდებარეობს. ვთქვათ D წერტილი წრეწირზე არ მდებარეობს. განვიხილოთ 79-ე ნახაზზე გამოსახული შემთხვევა. $\angle B + \angle D = 180^\circ$ პირობის თანახმად, ხოლო $\angle B + \angle AEC = 180^\circ$ წინა თეორემის ძალით. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\angle D = \angle AEC$, რაც შეუძლებელია, რადგან CED სამკუთხედის AEC გარე კუთხე მეტია მისი არამოსაზღვრე D შიდა კუთხეზე.

მე-80 ნახაზზე გამოსახული შემთხვევა განიხილება ანალოგიურად.



ნახ. 79



ნახ. 80

ამრიგად, D წერტილი წრეწირზე მდებარეობს. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. ეოველ მართკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

შედეგი 2. ეოველ ტოლფერდა ტრაპეციაზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

განსაზღვრება. ოთხკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი წრეწირს ეხება, წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედი ეწოდება, ხოლო წრეწირს – ოთხკუთხედში ჩახაზული.

თორემა 12.17. წრეწირზე შემოხაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ, წრეწირზე შემოხაზული $ABCD$ ოთხკუთხედის გვერდები ეხება წრეწირს M, N, E და F წერტილებში (ნახ. 81). რადგან მოცემული წერტილიდან ერთიდანამდე წრეწირისადმი გავლებული მხების მონაკვეთები ტოლია, ამიტომ

$$AM=AF, BM=BN, CE=CN, DE=DF.$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ:

$$AM+BM+CE+DE=AF+BN+CN+DF,$$

ნაიდანაც

$$AB+CD=BC+AD.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფერდი შუამონაკვეთის ტოლია.

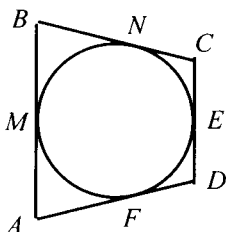
მართლაც, ამ შემთხვევაში ფერდი უდრის ფუძეების ნახევარჯამს. ე. ი. შუამონაკვეთის ტოლია.

თეორემა 12.18 (თეორემა 12.17-ის შეპრუნებული). თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ასეთ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ ოთხკუთხედში

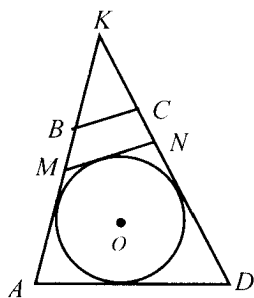
$$AB+CD=BC+AD.$$

(1)



ნახ. 81

ამ პირობიდან გამომდინარე, თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია, მაშინ იგი რომბია. რომში კი ეოველთვის ჩაიხაზება წრეწირი, რომლის ცენტრი დიაგონალუბის გადაკვეთის წერტილია.



ნახ. 82

MN მონაკვეთი, რომელიც წრეწირს ეხება. ვინაიდან $AMND$ ოთხკუთხედში ჩაიხაზულია წრეწირი, თეორემა 12.17-დან გამომდინარე

$$AM + ND = MN + AD. \quad (2)$$

თუ (1) ტოლობას გამოვაკლებთ (2)-ს, მივიღებთ

$$AB - AM + CD - ND = BC - MN,$$

საიდანაც

$$MB + CN = BC - MN.$$

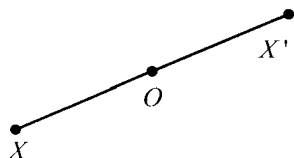
ეს კი შეუძლებელია, რადგან $BC - MN < 0$.

ანალოგიურად განიხილება შემთხვევა, როდესაც BC გვერდი კვეთს წრეწირს. თეორემა დამტკიცებულია.

§13. ფიგურათა გარდაქმნა

ვთქვათ რაიმე ფიგურის ეოველი წერტილი გადაადგილებულია რაიმე წესით. მივიღებთ ახალ ფიგურას, რომელსაც ეწოდებთ მოცემული ფიგურის გარდაქმნით მიღებულ ფიგურას. განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი.

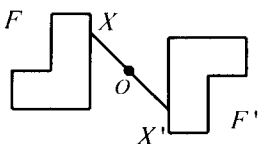
1. წერტილის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნა. ვთქვათ O სიბრტყის ფიქსირებული წერტილია, ხოლო X – სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი (ნახ.83). XO მონაკვეთის გაგრძელებაზე გადავდლოთ მისი ტოლი OX' მონაკვეთი. X' წერტილს ეწოდება X წერტილის



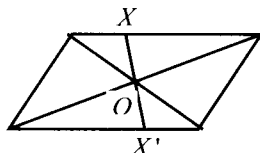
ნახ. 83

სიმეტრიული O წერტილის მიმართ. ცხადია, რომ X წერტილიც სიმეტრიულია X' წერტილის O წერტილის მიმართ. O წერტილის სიმეტრიულად ჩავთვალოთ თვით O წერტილი. წერტილის მიმართ სიმეტრიას ცენტრული სიმეტრია ეწოდება. განსაზღვრებიდან გამომდინარე ცენტრული სიმეტრია არის სიბრტყის თავის თავზე ასახვა, რომელიც სიბრტყის ყოველ წერტილს თავის სიმეტრიულ წერტილს შეუსაბამებს.

F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი მოცემული O წერტილის მიმართ სიმეტრიულ X' წერტილში გადადის, O წერტილის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნა ეწოდება, ამასთან F და F' ფიგურებს O წერტილის მიმართ სიმეტრიული ეწოდება (ნახ. 84). თუ O წერტილის მიმართ სიმეტრიულ გარდაქმნას F ფიგურა თავის თავში გადაეყვანა, მაშინ მას ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურა



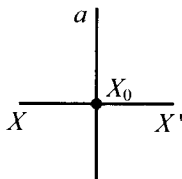
ნახ. 84



ნახ. 85

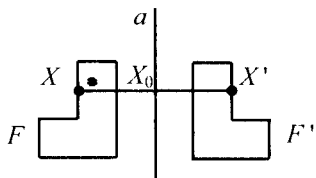
ეწოდება, O წერტილს კი — სიმეტრიის ცენტრი. მაგალითად, პარალელოგრამი ცენტრულ-სიმეტრიული ფიგურაა მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ (ნახ. 85).

2. წრფის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნა. ვთქვათ a ფიქსირებული წრფეა (ნახ. 86). ავიღოთ a წრფეზე არამდებარე რაიმე X წერტილი და a წრფეზე დაეუსმეთ XX_0 მართობი. XX_0 მართობის გაგრძელებაზე გადავდოთ მისი ტოლი X_0X' მონაკვეთი. X' წერტილს ეწოდება X წერტილის სიმეტრიული a წრფის მიმართ. ცხადია, რომ X -იც სიმეტრიულია X' -ის a წრფის მიმართ. თუ X წერტილი a წრფეზე მდებარეობს, მაშინ მის სიმეტრიულად ჩავთვალოთ თვით X წერტილი. წრფის მიმართ სიმეტრიას ღერძული სიმეტრია ეწოდება. განსაზღვრებიდან გამომდინარე ღერძული სიმეტრია არის სიბრტყის ასახვა თავის თავზე.

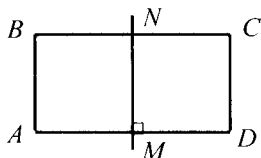


ნახ. 86

F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი მოცემული a წრფის მიმართ სიმეტრიულ X' წერტილში გადადის, a წრფის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნა ეწოდება. ამასთან F და F' ფიგურებს a წრფის მიმართ სიმეტრიული ეწოდება (ნახ. 87).



ნახ. 87



ნახ. 88

თუ a წრფის მიმართ სიმეტრიულ გარდაქმნას F ფიგურა თავის თავში გადაყავს, მაშინ ამ ფიგურას a წრფის მიმართ სიმეტრიული ქვდება, a წრფეს კი – სიმეტრიის ღერძი.

თეორემა 13.1. მართკუთხედის გვერდის შუამართობი ამ მართკუთხედის სიმეტრიის ღერძს წარმოადგენს.

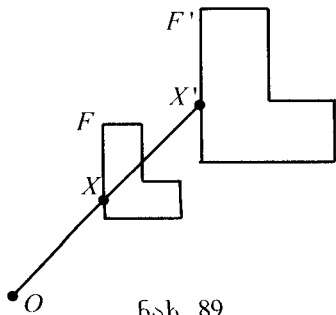
დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD$ მოცემული მართკუთხედია, $MN \perp AD$ და $AM = MD$ (ნახ. 88). განვიხილოთ $ABCD$ მართკუთხედის სიმეტრიული გარდაქმნა MN წრფის მიმართ. პირობის ძალით A და D წერტილები სიმეტრიული არიან MN წრფის მიმართ. ვაჩვენოთ, რომ B და C წერტილებიც სიმეტრიული არიან MN წრფის მიმართ. მართლაც, რადგან $MN \perp AD$ და $BC \parallel AD$, ამიტომ $MN \perp BC$, ხოლო თაღესის თეორემის ძალით $BN = NC$. ცხადია, რომ თუ მართკუთხედზე ავიღებთ ნებისმიერ წერტილს, მისი სიმეტრიული წერტილი MN წრფის მიმართ აგრეთვე მართკუთხედზე მდებარეობს. ამრიგად, $ABCD$ მართკუთხედი სიმეტრიულია MN წრფის მიმართ; თეორემა დამტკიცებულია.

წრფის მიმართ სიმეტრიული ფიგურების მაგალითებია აგრეთვე წრეწირი, ცენტრზე გამავალი წრფის მიმართ; რომში, მისი დიაგონალის შემცველი წრფის მიმართ და ა. შ.

პარალელოგრამს, რომელიც მართკუთხედი და რომში არ არის, სიმეტრიის ღერძი არ გააჩნია.

3. პოთოთეტი. ვთქვათ F მოცემული ფიგურაა, O კი ფიქსირებული წერტილი (ნახ. 89). F ფიგურის ნებისმიერ X წერტილზე გავავლოთ OX სხივი და მასზე O წერტილიდან გადავდოთ $k \cdot OX$ -ის ტოლი OX' მონაკვეთი, სადაც k დადებითი რიცხვია.

F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ყოველი X წერტილი გადადის ისეთ X' წერტილში, რომ $OX' = k \cdot OX$, ($k > 0$)



ნახ. 89

ეწოდება პომოთეცია O ცენტრის მიმართ. k რიცხვს პომოთეციის კოეფიციენტი ეწოდება, ხოლო F' ფიგურას F ფიგურის პომოთეტიური კოეფიციენტით k . შევნიშნოთ, რომ თუ F ფიგურა F' ფიგურის პომოთეტიურია კოეფიციენტით k , მაშინ F' ფიგურა F ფიგურის პომოთეტიურია კოეფიციენტით $\frac{1}{k}$.

პომოთეცია უარყოფითი კოეფიციენტითაც განიხილება. თუ $k < 0$, მაშინ X' წერტილს ეწოდება X -ის პომოთეტიური k კოეფიციენტით, თუ X' ეკუთვნის OX სხივის დამატებით სხივს და $OX' = |k| \cdot OX$.

ამრიგად, პომოთეცია O ცენტრითა და $k \neq 0$ კოეფიციენტით ეწოდება სიბრტყის თავის თავზე ასახვას, რომელიც სიბრტყის ნებისმიერ X წერტილს ასახავს ამ წერტილის პომოთეტიურ წერტილზე O ცენტრის მიმართ k კოეფიციენტით. პომოთეცია შექცევადი ასახვაა.

შევნიშნოთ, რომ პომოთეცია $k = -1$ კოეფიციენტით ცენტრული სიმეტრიაა (ე. ი. ცენტრული სიმეტრია პომოთეციის კერძო შემთხვევაა). ასევე, პომოთეცია $k = 1$ კოეფიციენტით სიბრტყის ყოველ წერტილს თავის თავზე ასახავს, ე. ი. პომოთეცია $k = 1$ კოეფიციენტით იგივერი ასახვაა.

ადვილია ჩვენება, რომ თუ A' წერტილი A წერტილის პომოთეტიურია O ცენტრის მიმართ, პომოთეციის k კოეფიციენტით, $B' -$ კი B წერტილის, მაშინ $A'B' = |k| \cdot AB$.

4. მოძრაობა. F ფიგურის F' ფიგურად ისეთ გარდაქმნას, რომელსაც F ფიგურის ნებისმიერი ორი X და Y წერტილი F' ფიგურის ისეთ X' და Y' წერტილებში გადაჰყავს, რომ $XY = X'Y'$ ეწოდება მოძრაობა.

ე. ი. მოძრაობა არის ფიგურის ისეთი გარდაქმნა, რომელიც წერტილებს შორის მანძილს ინარჩუნებს. ასეთ გარდაქმნას გადაადგილებასაც უწოდებენ.

შეიძლება ვთქვათ, რომ წერტილის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნა და წრფის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნა მოძრაობებს წარმოადგენენ.

მოძრაობას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

ა) მოძრაობას, წრფეზე მდებარე წერტილები კვლავ წრფეზე მდებარე წერტილებში გადაჰყავს ისე, რომ მათი ურთიერთგანლაგება უცვლელი რჩება.

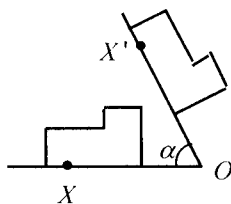
ბ) მოძრაობას წრფეები წრფეებში გადაჰყავს, სხივები - სხივებში, მონაკვეთები კი - მონაკვეთებში.

გ) მოძრაობას კუთხე მის ტოლ კუთხეში გადაჰყავს.

დ) მიმდევრობით შესრულებული ორი მოძრაობა მოძრაობას წარმოადგენს.

ვთქვათ F ფიგურის F' ფიგურად გარდაქმნას F ფიგურის განსხვავებულ ∇ ვერტიკლები F' ფიგურის განსხვავებულ ვერტიკლებში გადაჰყავს. დაუშვათ, რომ F ფიგურის ნებისმიერი X ვერტიკლი ამ გარდაქმნისას F' ფიგურის X' ვერტიკლში გადადის. F' ფიგურის F ფიგურად გარდაქმნას, როცა X' ვერტიკლი X ვერტიკლში გადადის, მოცემული გარდაქმნის შექცევული გარდაქმნა ეწოდება. მოძრაობა ვერტიკლებს შორის მანძილს ინარჩუნებს, ამიტომ იგი განსხვავებულ ვერტიკლებს განსხვავებულ ვერტიკლებში გადაიყვანს. ცხადია, რომ მოძრაობის შექცევული გარდაქმნა მოძრაობაა.

5. მობრუნება. მოცემული ვერტიკლის გარშემო მობრუნება ეწოდება ისეთ მოძრაობას, როცა ამ ვერტიკლიდან გამოსული ყოველი სხივი ერთიდაიმავე მიმართულებით (საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით ან საწინააღმდეგო მიმართულებით) და ერთიდაიმავე კუთხით მობრუნდება (ნახ. 90).



ნახ. 90

ამრიგად, ფიგურის მობრუნება მოცემულად წაითვლება თუ ცნობილია: 1) მობრუნების O ცენტრი; 2) მობრუნების α კუთხე; 3) მობრუნების მიმართულება. O ცენტრის გარშემო α კუთხით მობრუნება R_0^α

სიმბოლოთი აღინიშნება. ის ფაქტი, რომ R_0^α მობრუნებას X ვერტიკლი გადაჰყავს X' ვერტიკლში შემდეგნაირად წაიწერება: $R_0^\alpha(X)=X'$.

თუ მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, მაშინ მიღებულია, რომ $\alpha > 0$, ხოლო თუ — საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით, მაშინ $\alpha < 0$; $\alpha = 0$ შეესაბამება სიბრტყის იგივეურ ასახვას (ანუ ეს არის ასახვა, რომლითაც თითოეულ ვერტიკლს თვით ეს ვერტიკლი შეესაბამება). აქედან გამომდინარე, $-\pi < \alpha \leq \pi$, მაგრამ, თუ მობრუნებას განვიხილავთ, როგორც ბრუნვის შედეგს, მაშინ მობრუნების კუთხე შეიძლება იყოს ნებისმიერი; ამასთან, ცხადია, რომ $R_0^{\alpha+2\pi k} = R_0^\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$. მაგალითად, $R_0^{750^\circ} = R_0^{30^\circ}$.

ამრიგად, მობრუნება არის სიბრტყის ასახვა თავის თავზე. ასეთი ასახვისას O ვერტიკლს თვით ეს ვერტიკლი შეესაბამება. აღვიღო შემჩნევა, რომ მობრუნება $\alpha = 180^\circ$ -ის ტოლი კუთხით ცენტრული სიმეტრიაა.

§14. ფიგურათა ტოლობა. მსგავსების გარდაქმნა

F და F' ფიგურებს ეწოდება ტოლი, თუ მოძრაობით ერთი მათგანი მეორეში გადადის. ფიგურათა ტოლობის აღნიშვნისათვის სვეულდებრივი ტოლობის “=” ნიშანი გამოიყენება. $F=F'$ ნაწარწერი ნიშნავს F და F' ფიგურების ტოლობას.

F ფიგურის ისეთ გარდაქმნას F' ფიგურად, როცა მისი ნებისმიერი X და Y წერტილები გადადის X' და Y' წერტილებში, ისე რომ $X'Y'=k \cdot XY$, ($k>0$), ამასთან k რიცხვი ეწევა X , Y წერტილებისათვის ერთიდაიგივეა, მსგავსების გარდაქმნა ეწოდება (ნახ. 91). k რიცხვს მსგავსების კოეფიციენტი ეწოდება. ე. ი. მსგავსების გარდაქმნა წერტილებს შორის მანძილს ერთიდაიმავე რიცხვჯერ ცვლის.

მტკიცდება, რომ ჰომოთეტია მსგავსების გარდაქმნაა.

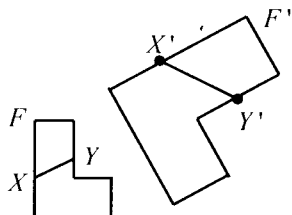
მსგავსების გარდაქმნას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1) მსგავსების გარდაქმნას წრფეზე მდებარე წერტილები კვლავ წრფეზე მდებარე წერტილებში გადაჰყავს ისე, რომ მათი ურთიერთგანლაგება უცვლელი რჩება.

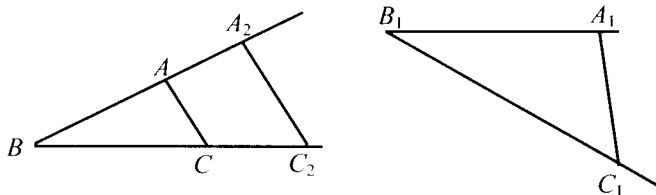
2) მსგავსების გარდაქმნას წრფეები წრფეებში გადაჰყავს, სხივები – სხივებში, მონაკვეთები კი – მონაკვეთებში.

3) მსგავსების გარდაქმნას კუთხე მის ტოლ კუთხეში გადაჰყავს.

დავამტკიცოთ უკანასკნელი თვისება. ვთქვათ, მსგავსების გარდაქმნით, რომლის კოეფიციენტია k , ABC კუთხე $A_1B_1C_1$ კუთხეში გადადის (ნახ. 92).



ნახ. 91



ნახ. 92

განვიხილოთ ABC კუთხის B წვეროს მიმართ პოლოტიკის გარდაქმნა, რომლის კოეფიციენტი k . ამ გარდაქმნით A და C წერტილები A_2 და C_2 წერტილებში გადავა. $\Delta A_2BC_2 = \Delta A_1B_1C_1$ სამკუთხედებს ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, რაც უნდა დაგვემოწიკებინა.

§15. ფიგურათა მსგავსება. სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები

F და F' ფიგურებს მსგავსი ეწოდება, თუ მსგავსების გარდაქმნით ერთი მათგანი მეორეში გადადის. ფიგურათა მსგავსების აღნიშვნისათვის $\sim$ ნიშანი გამოიყენება. ჩანაწერი, k

$F \sim F'$ ნიშნავს, რომ F ფიგურა F' ფიგურის მსგავსია კოეფიციენტით k , ე. ი. თუ X და Y არის F ფიგურის ნებისმიერი წერტილები, ხოლო $X', Y' - F'$ ფიგურის შესაბამისი წერტილები,

$$k = \frac{X'Y'}{XY}$$

მაშინ $X'Y' = k \cdot XY$. ცხადია, რომ თუ $F \sim F'$, მაშინ $F' \sim F$. ხშირად, როდესაც k კოეფიციენტს არსებითი მნიშვნელობა არა აქვს, დავწერთ $F \sim F'$ ან $F' \sim F$. შევნიშნოთ, რომ, თუ $F \sim F'$ და $F' \sim F''$, მაშინ $F \sim F''$.

მსგავსების გარდაქმნის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ მსგავსი ფიგურების შესაბამისი კუთხეები ტოლია, ხოლო შესაბამისი მონაკვეთები – პროპორციული.

თეორემა 15.1. ორი სამკუთხედი მსგავსია:

- 1) თუ ერთი სამკუთხედის ორი კუთხე მეორე სამკუთხედის ორი კუთხის ტოლია;
- 2) თუ ერთი სამკუთხედის ორი გვერდი მეორე სამკუთხედის ორი გვერდის პროპორციულია და ამ გვერდებით შექმნილი კუთხეები ტოლია;
- 3) თუ ერთი სამკუთხედის გვერდები მეორე სამკუთხედის გვერდების პროპორციულია.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედებისათვის სრულდება ერთ-ერთი პირობა;

$$1) \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1;$$

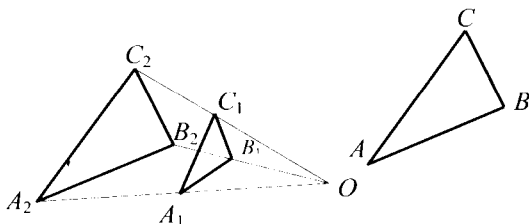
$$2) \angle A = \angle A_1, \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1};$$

$$3) \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

განვიხილოთ კომპოზიტია ნებისმიერი O (კენტრი (ნახ. 93) და მსგავსების კოეფიციენტით $k = \frac{AB}{A_1B_1}$. ამ გარდაქმნით $\Delta A_1B_1C_1$ გადავა $A_2B_2C_2$ სამკუთხედში. ABC და $A_2B_2C_2$ სამკუთხედები ტოლია. მართლაც, პირველ შემთხვევაში გვაქვს: $\angle A = \angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B = \angle B_1 = \angle B_2$.

$$AB = k \cdot A_1B_1 = A_2B_2.$$

$\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2$ სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნის თანახმად. მეორე შემთხვევაში



ნახ. 93

$$\angle A_2 = \angle A, \quad A_2B_2 = AB, \quad A_2C_2 = AC$$

და სამკუთხედები ტოლია სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად. მესამე შემთხვევაში

$$A_2B_2 = AB, \quad B_2C_2 = BC, \quad A_2C_2 = AC$$

და სამკუთხედები ტოლია სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად. რადგან $\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2$, ხოლო $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$, ამიტომ $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

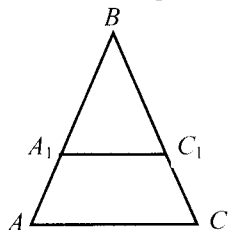
შედეგო 1. მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, თუ მათ თითო მახვილი კუთხე ტოლი აქვთ.

შედეგო 2. მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, თუ ერთი მათგანის კათეტები მეორის კათეტების პროპორციულია.

შედეგო 3. მსგავს სამკუთხედებში შესაბამისი სიმაღლეების, მედიანების და ბისექტრისების შეფარდება მსგავსების კოეფიციენტის ტოლია.

შეტიკდება, რომ n -კუთხედები მსგავსია, თუ მათი შესაბამისი გვერდები პროპორციულია და შესაბამისი კუთხეები ტოლია.

თეორემა 15.2. სამკუთხედის რომელიმე გვერდის პარალელური და დანარჩენი ორი გვერდის გადამკვეთი წრფით მიღებული სამკუთხედი მოცემული სამკუთხედის მსგავსია.



ნახ. 94

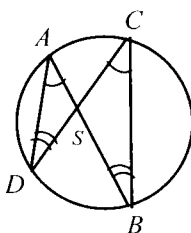
დამტკიცება. ვთქვათ A_1BC_1 წარმოადგენს სამკუთხედს, რომელიც მიიღება ABC სამკუთხედის AB და BC გვერდების გადამკვეთი AC -ს პარალელური წრფით (ნახ. 94).

რადგან $A_1C_1 \parallel AC$, ამიტომ $\angle A = \angle BA_1C_1$ და $\angle C = \angle BC_1A_1$, როგორც შესაბამისი კუთხეები, მაშასადამე $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$ (თეორემა 15.1). თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 15.3. ერთიდაიმავე წრეწირის ორი ქორდიდან თითოეული გადაკვეთის მონაკვეთებად, რომელთა ნამრავლი ერთმანეთის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ AB და CD ქორდები იკვეთებიან S წერტილში (ნახ. 95). $\triangle ASD \sim \triangle CSB$ სამკუთხედების მსგავსების პირველი ნიშნის თანახმად. მართლაც, $\angle A = \angle C$ როგორც ერთსადაიმავე DB რკალზე დაერქობილი ნახაზული კუთხეები და ანალოგიურად $\angle D = \angle B$. სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს:

$$\frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS},$$



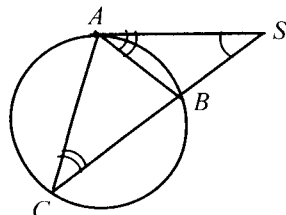
ნახ. 95

საიდანაც $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. თეორემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ S წერტილიდან გავლებული მკვეთი წრეწირის კვეთს B და C წერტილებში (ნახ. 96). S წერტილიდან გავლებული მკვეთი ეწოდება SC მონაკვეთს. BC -ს ეწოდება მკვეთის შიგა მონაკვეთი, ხოლო SB -ს კი – გარე მონაკვეთი.

თეორემა 15.4. თუ მოცემული წერტილიდან ერთიდაიმავე წრეწირისადმი გავლებულია მხები და მკვეთი, მაშინ მხების მონაკვეთის კვადრატი უდრის მკვეთის ნამრავლს მისივე გარე მონაკვეთზე.

დამტკიცება. ვთქვათ SA და SC მოცემული მხები და მკვეთია (ნახ. 96). $\triangle SAC \sim \triangle SBA$ სამკუთხედების მსგავსების პირველი ნიშნის თანახმად. მართლაც, $\angle S$ საერთოა, ხოლო $\angle C = \angle SAB$, რადგან თითოეული მათგანი AB რკალის



ნახ. 96

გრადუსული ზომის ნახევრის ტოლია. სამკუთხედების მსგავსებიდან გვაქვს:

$$\frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SA},$$

საიდანაც

$$SA^2 = SB \cdot SC.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

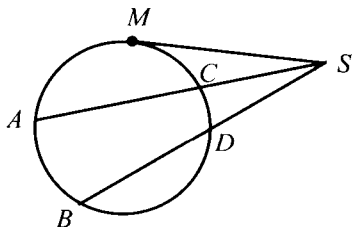
თეორემა 15.5. მოცემული წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებული მკვეთის ნამრავლი მისსავე გარე მონაკვეთზე მუდმივი სიდიდეა და უდრის იმავე წერტილიდან გავლებული მხების მონაკვეთის კვადრატს.

დამტკიცება. ვთქვათ SA და SB მოცემული მკვეთებია (ნახ. 97). თუ გავავლებთ SM მხებს, მაშინ წინა თეორემის თანახმად

$$SM^2 = SA \cdot SC,$$

$$SM^2 = SB \cdot SD,$$

საიდანაც $SA \cdot SC = SB \cdot SD$. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 97.

§16. პითაგორას თეორემა

თეორემა 16.1 (პითაგორა). მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის კვადრატია კათეტების კვადრატების ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC მოცემული მართკუთხა სამკუთხედი C მართი კუთხით. C მართი კუთხის წვეროდან გავავლოთ CD სიმაღლე (ნახ. 98). ADC და ABC მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია, რადგან მათ A მახვილი კუთხე საერთო აქვთ. ამიტომ

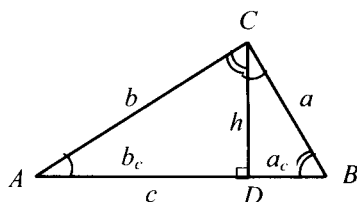
$$\frac{b}{c} = \frac{b_c}{b},$$

საიდანაც

$$b^2 = b_c \cdot b. \quad (1)$$

ანალოგიურად

$$a^2 = a_c \cdot a. \quad (2)$$



ნახ. 98

(1) და (2) ტოლობების შეკრებით მივიღებთ:

$$a^2 + b^2 = c \cdot a_c + c \cdot b_c = c(a_c + b_c) = c \cdot c = c^2.$$

ამრიგად,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

(1) და (2) ტოლობები ნიშნავს, რომ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის კვადრატი ჰიპოტენუზისა და ჰიპოტენუზაზე ამ კათეტის გეგმილის ნამრავლის ტოლია.

პითაგორას თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ თუ ერთიდაიმავე წერტილიდან წრფისადმი გაკლებულია მართობი და დახრილი, მაშინ დახრილი მართობზე მეტია, ტოლ დახრილებს ტოლი გეგმილები აქვთ, ორი დახრილიდან ისაა მეტი, რომლის გეგმილიც მეტია.

თეორემა 16.2. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლის კვადრატი ჰიპოტენუზაზე კათეტების გეგმილების ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ ABC მოცემული მართკუთხა სამკუთხედი C მართი კუთხით. C მართი კუთხის წვეროდან გაავლოთ CD სიმაღლე (ნახ. 98). ADC და BDC მართკუთხა სამკუთხედები მსგავსია. ამიტომ

$$\frac{h}{b_c} = \frac{a_c}{h},$$

საიდანაც

$$h^2 = a_c \cdot b_c.$$

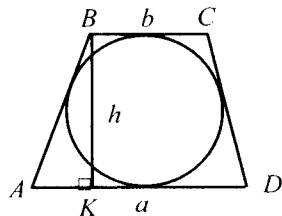
თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 16.3. წრეწირზე შემოსახული ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლის კვადრატი ფუძეების ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. განვიხილოთ წრეწირზე შემოსახული $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეცია (ნახ. 99). B წვეროდან დავუშვათ BK სიმაღლე. ვთქვათ, $AD=a$, $BC=b$, $BK=h$. ABK მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$h^2 = AB^2 - AK^2 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a-b}{2} \right)^2 = ab.$$

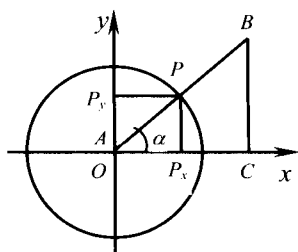
თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 99

§17. დამოკიდებულება მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის

ვთქვათ, ABC მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის C კუთხე მართია და A წვეროსთან მდებარე მახვილი კუთხე უდრის α -ს. ავირჩიოთ XOY მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ისე, რომ მისი სათავე დაემთხვეს სამკუთხედის A წვეროს, AC კათეტი აბსცისათა ღერძზე მდებარეობდეს, ხოლო B წერტილი – პირველ მეოთხედში (ნახ. 100).



ნახ. 100

ამიტომ

განვიხილოთ აგრეთვე ერთეულრადიუსიანი წრეწირი (ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ერთეულოვანი წრეწირისა და AB სხივის გადაკვეთის P წერტილიდან კოორდინატთა ღერძებზე დავეშვათ PP_x და PP_y მართობები. სინუსისა და კოსინუსის განსაზღვრების თანახმად

$$OP_x = \cos \alpha, \quad OP_y = \sin \alpha.$$

რადგან

$$\triangle ABC \sim \triangle APP_x,$$

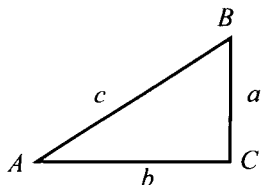
$$\frac{BC}{AB} = \frac{PP_x}{AP} = \frac{\sin \alpha}{1} = \sin \alpha,$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AP_x}{AP} = \frac{\cos \alpha}{1} = \cos \alpha.$$

აქედან

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{BC}{AC}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{AC}{BC}.$$

ამრიგად, თუ განვიხილავთ a და b კათეტებისა და c ჰიპოტენუზის მქონე ABC მართკუთხა სამკუთხედს (ნახ. 101), შეიძლება დავასკვნათ: მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან არის ამ კუთხის სინუსი, მიმდებარე კათეტის შეფარდება ჰიპოტენუზასთან – კოსინუსი, მოპირდაპირე კათეტის შეფარდება მიმდებარე კათეტთან – ტანგენსი, ხოლო მიმდებარე კათეტის შეფარდება მოპირდაპირე კათეტთან – კოტანგენსი.



ნახ. 101

გ. ი.

$$\frac{a}{c} = \sin A, \quad \frac{b}{c} = \cos A, \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A.$$

აქედან

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad a = b \operatorname{tg} A, \quad b = a \operatorname{ctg} A.$$

მაშასადამე:

მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი უდრის ჰიპოტენუზას, გამრავლებულს ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხის სინუსზე ან მიმდებარე კუთხის კოსინუსზე.

მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი უდრის მეორე კათეტს, გამრავლებულს პირველი კათეტის მოპირდაპირე კუთხის ტანგენსზე ან მიმდებარე კუთხის კოტანგენსზე.

§18. კოსინუსების თეორემა. სინუსების თეორემა

თეორემა 18.1 (კოსინუსების თეორემა). სამკუთხედის გვერდის კვადრატით უდრის დანარჩენი ორი გვერდის კვადრატების ჯამს გამოკლებული ამ გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის კოსინუსის გაორგეგმული ნამრავლი.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია ABC სამკუთხედი (ნახ. 102). დავამტკიცოთ, რომ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

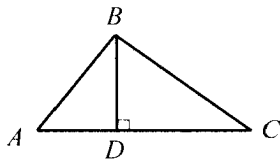
თუ A და C კუთხეები მახვილია, მაშინ BD სიმაღლე ეკუთვნის $\triangle ABC$ -ს (ნახ. 102). BCD მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$BC^2 = BD^2 + DC^2.$$

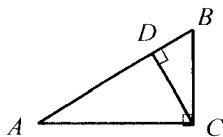
ვინაიდან $BD = AB \sin A$ და $DC = AC - AD = AC - AB \cos A$, მივიღებთ

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 \sin^2 A + (AC - AB \cos A)^2 = AB^2 \sin^2 A + AC^2 - \\ &- 2AC \cdot AB \cos A + AB^2 \cos^2 A = AB^2 + AC^2 - \\ &- 2AC \cdot AB \cos A. \end{aligned}$$

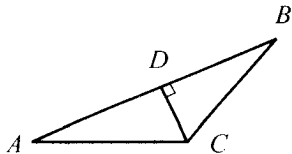
თუ C კუთხე მართია (ნახ. 103) ან ბლაგვია (ნახ. 104), მაშინ დამტკიცება ანალოგიურია, თუ სიმაღლეს გავავლებთ C წვეროდან.



ნახ. 102



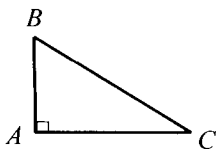
ნახ. 103



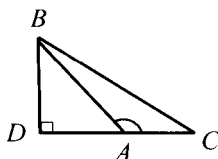
ნახ. 104

თუ A კუთხე მართია (ნახ. 105), მაშინ ვინაიდან $\cos A = \cos 90^\circ = 0$, გვაქვს

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$



ნახ. 105



ნახ. 106

ვთქვათ A კუთხე ბლაგვია (ნახ. 106). თუ გავავლებთ BD სიმაღლეს, გვაქვს

$$BD = AB \sin(180^\circ - A) = AB \sin A,$$

$$DC = AC + AD = AC + AB \cos(180^\circ - A) = AC - AB \cos A.$$

გამომდინარე აქედან დამტკიცება ისევე ჩატარდება, როგორც პირველ შემთხვევაში. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 18.2. პარალელოგრამის დიაგონალების კვადრატების ჯამი მისი გვერდების კვადრატების ჯამის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია $ABCD$ პარალელოგრამი (ნახ. 107). ABC და ABD სამკუთხედებისათვის კოსინუსების თეორემა გვაძლევს:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B,$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A.$$

თუ მიღებულ ტოლობებს შევკრებთ და გავითვალისწინებთ, რომ

$$AB = CD, BC = AD \text{ და } \cos B = \cos(180^\circ - A) = -\cos A,$$

გვაქვს:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

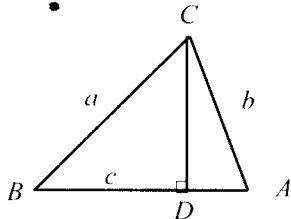
თეორემა 18.3 (სინუსების თეორემა). სამკუთხედის გვერდები მოპირდაპირე კუთხეების სინუსების პროპორციულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ABC სამკუთხედი, რომლის გვერდებია a , b და c . დავამტკიცოთ, რომ

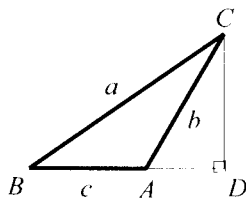
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, მაშინ თეორემის სამართლიანობა ცხადია.

C წვეროდან დაეშვათ CD სიმაღლე. თუ A კუთხე მახვილია (ნახ. 108), მართკუთხა ACD სამკუთხედიდან მივიღებთ: $CD = b \sin A$. თუ A კუთხე ბლაგვია (ნახ. 109), მაშინ $CD = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A$.



ნახ. 108



ნახ. 109

ანალოგიურად, BCD სამკუთხედიდან მივიღებთ: $CD = a \sin B$. ამრიგად,

$$a \sin B = b \sin A,$$

ხოდანაც

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

ანალოგიურად, თუ სიმაღლეს დაეშვათ A წვეროდან, დამტკიცდება ტოლობა

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

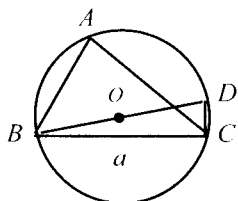
ამრიგად,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 18.4. სამკუთხედის გვერდის შეფარდება მოპირდაპირე კუთხის სინუსთან უდრის ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრს.

დამტკიცება. ვთქვათ a არის ABC სამკუთხედის A კუთხის მოპირდაპირე გვერდი, ხოლო R – ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი. დავამტკიცოთ, რომ



ნახ. 110

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

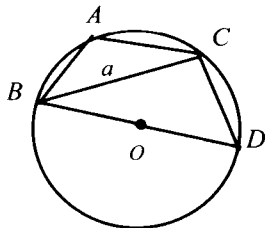
სამკუთხედის A -გან განსხვავებულ ერთ-ერთ წვეროზე, მაგალითად B -ზე, გაავლოთ BD დიამეტრი (ნახ. 110 და 111) და D წერტილი შევეართოთ C -სთან. BCD სამკუთხედი მართკუთხაა, რადგან

$\angle BCD=90^\circ$, როგორც დიამეტრით მოჭიმულ რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხე. ამ სამკუთხედიდან $a=BD \cdot \sin D=2R \sin D$. მაგრამ $\sin D=\sin A$, რადგან თუ A კუთხე მახვილია (ნახ. 110) $\angle D=\angle A$ როგორც ვრთიდა-იმავე რკალზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხეები, ხოლო თუ A კუთხე ბლაგვია (ნახ. 111), მაშინ $\angle A+\angle D=180^\circ$ და $\sin D=\sin(180^\circ-A)=\sin A$. მაშასადამე

$$a=2R \sin A,$$

საიდანაც

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$



ნახ. 111

თეორემა დამტკიცებულია.

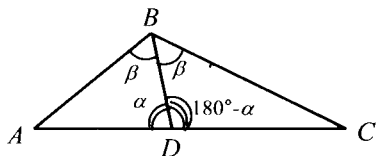
თეორემა 18.5. სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისა ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდს მიმდებარე გვერდების პროპორციულ მონაკვეთებად ყოფს.

დამტკიცება. ვთქვათ BD მოცემული ABC სამკუთხედის ბისექტრისაა (ნახ. 112). დავამტკიცოთ, რომ

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}.$$

ABD და CBD სამკუთხედებისათვის გამოვიყენოთ სინუსების თეორემა:

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha},$$



ნახ. 112

$$\frac{CD}{\sin \beta} = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{BC}{\sin \alpha}.$$

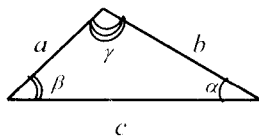
თუ პირველ ტოლობას მეორეზე გავყოფთ, მივიღებთ:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

§19. სამკუთხედების ამოხსნა

სამკუთხედის ამოხსნა ნიშნავს, მისი ცნობილი კუთხეებისა და გვერდების მიხედვით, ვიპოვოთ უცნობი გვერდები და კუთხეები. სამკუთხედის გვერდები აღვნიშნათ a , b და c -თი, ხოლო გვერდების მოპირდაპირე კუთხეები შესაბამისად α , β და γ -თი (ნახ. 113). ვასვენოთ რომ სამკუთხედის ამოხსნა შესაძლებელია, თუ მისი გვერდებიდან და კუთხეებიდან ცნობილია სამი, რომელთაგან ერთი მაინც გვერდია. განვიხილოთ ექვლა შესაძლო შემთხვევა.



ნახ. 113

1. მოცემულია სამკუთხედის გვერდი და ორი კუთხე. ვიპოვოთ მესამე კუთხე და დანარჩენი ორი გვერდი.

ამოხსნის გზა. რადგან სამკუთხედის კუთხეების ჯამი 180° -ია, ამიტომ მესამე კუთხე, მოცემული კუთხეებით გამოისახება. როცა გვეცოდინება გვერდი და სამივე კუთხე, სინუსების თეორემის მიხედვით ვიპოვოთ დანარჩენ ორ გვერდს. ამოცანას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და მასთან ერთადერთი. ცხადია, მოცემული ორი კუთხის ჯამი 180° -ზე ნაკლები უნდა იყოს. ამონახსნის ერთადერთობა სამკუთხედების ტოლობის მეორე ნიშნიდან გამომდინარეობს.

2. მოცემულია ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე. ვიპოვოთ დანარჩენი ორი კუთხე და მესამე გვერდი.

ამოხსნის გზა. კოსინუსების თეორემით ვიპოვოთ მესამე გვერდს. ახლა, რადგან გვაქვს სამი გვერდი, კოსინუსების თეორემით შეიძლება დანარჩენი კუთხეების კოსინუსების, ე. ი. თვით კუთხეების გამოთვლა. ამოცანას ყოველთვის აქვს ამონახსნი და მასთან ერთადერთი. ამონახსნის ერთადერთობა სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნიდან გამომდინარეობს.

3. მოცემულია ორი გვერდი, მაგალითად a და b და ერთ-ერთი მათგანის მოპირდაპირე კუთხე, მაგალითად α . ვიპოვოთ დანარჩენი ორი კუთხე და მესამე გვერდი.

ამოხსნის გზა. სინუსების თეორემით ვიპოვოთ $\sin\beta$ -ს. $\sin\beta$ -ს მიხედვით ვიპოვოთ მისი შესაბამის β_1 და β_2 კუთხეებს. ამ კუთხეებიდან ავიღებთ ერთს ან ორივეს იმის გათვალისწინებით, რომ a და b გვერდებიდან მეტი გვერდის პირდაპირ მეტი კუთხე ძევს. როცა უკვე ცნობილია α და β კუთხეები, ვიპოვოთ $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ კუთხეც, შემდეგ კი სინუსების თეორემის მიხედვით — c გვერდს. წინა ორი ამოცანისაგან განსხვავებით ამ ამოცანას

შეიძლება არ ჰქონდეს ამონახსნი, ჰქონდეს ერთი ან ორი ამონახსნი.

4. მოცემულია სამკუთხედის სამი გვერდი. ვიპოვოთ მისი კუთხეები.

ამოხსნის გზა. კოსინუსების თეორემით ვიპოვიოთ ერთ-ერთ კუთხეს. ანალოგიურად ვიპოვიოთ მეორე კუთხეს, მესამე კუთხეს კი – ნაპოვნი კუთხეების საშუალებით. ამ ამოცანას მაშინ აქვს ამონახსნი, როცა უდიდესი გვერდი დანარჩენი ორი გვერდის ჯამზე ნაკლებია.

შევნიშნოთ, რომ თუ სამკუთხედი მართკუთხაა, საკმარისია გამოვიყენოთ მე-17 პარაგრაფში მოყვანილი თანაფარდობები სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის.

§20. ფიგურათა ფართობები

ფიგურის ფართობის მოძებნის ამოცანა შორეულ წარსულს განეკუთვნება. იგი დაკავშირებულია ადამიანთა პრაქტიკულ საქმიანობასთან.

წარმოვიდგინოთ მიწის ორი ნაკვეთი: ერთი კვადრატის ფორმის, მეორე კი ნებისმიერი ფორმის. ვთქვათ ორივე ნაკვეთზე ხორბლის დათესვის შემდეგ გამოირკვა, რომ პირველ ნაკვეთს m კგ მარცვალი დასჭირდა, მეორეს კი – n კგ. ბუნებრივია

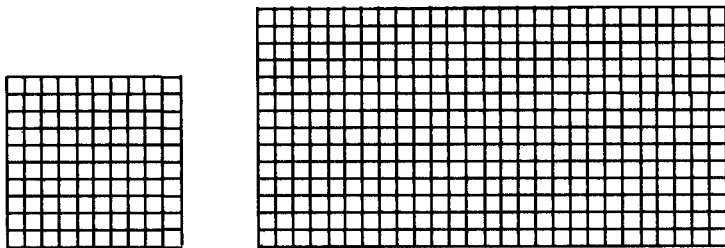
ვიფიქროთ, რომ მეორე ნაკვეთი $\frac{n}{m}$ -ჯერ მეტია პირველზე.

რიცხვს, რომელიც გვინვენებს რამდენჯერ მეტია მეორე ნაკვეთი პირველზე, მეორე ნაკვეთის ფართობს ვუწოდებთ. პირველი ნაკვეთი აქ საზომი ერთეულია. ამ აზრით ერთმანეთს შეიძლება შევადაროთ კვადრატი და ნებისმიერი ფიგურა, სადაც კვადრატი საზომი ერთეულია. ფართობის ცნების ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს ფართობის შემდეგი თვისებები:

1. ყოველ ფიგურას გარკვეული ფართობი აქვს.
 2. ტოლ ფიგურებს ტოლი ფართობები აქვთ (ტოლი ფართობების მქონე ფიგურებს ტოლდისი ვწოდებთ).
 3. თუ ფიგურას ორ ნაწილად გაყოფოთ, მაშინ ამ ნაწილების ფართობთა ჯამი მოცემული ფიგურის ფართობის ტოლია.
- ქვემოთ, ჩვენ გამოვიყვანოთ სხვადასხვა მრავალკუთხედების ფართობის გამოსათვლელ ფორმულებს.

I. მართკუთხედის ფართობი

ვთქვათ მოცემულია კვადრატის, რომელიც ფართობის საზომი ერთეულია და მართკუთხედი, რომლის ფართობიც უნდა ვიპოვოთ (ნახ. 114). სიგრძის ერთეულს კვადრატის გვერდი წარმოადგენს.



ნახ. 114

განვიხილოთ, რომ, თუ მართკუთხედის გვერდებია a და b , მაშინ მისი S ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S=ab.$$

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა მართკუთხედის გვერდების a და b სიგრძეები ისეთი სასრული ათწილადებით გამოისახება, რომლებშიც მძიმის შემდეგ ათწილადი ნიშნების რაოდენობა n -ს არ აღემატება.

კვადრატის გვერდები 10^n ტოლ ნაწილად დავეოთ და დაყოფის წერტილებზე კვადრატის გვერდების პარალელური წრფეები გაავლოთ. კვადრატი $10^n \cdot 10^n = 10^{2n}$ პატარა კვადრატად დაიყოფა. ვიპოვოთ პატარა კვადრატის ფართობი. ფართობის თვისების თანახმად დიდი კვადრატის ფართობი პატარა კვადრატების ფართობთა ჯამის ტოლია. რადგან დიდი კვადრატის ფართობი ერთეულის ტოლია და პატარა კვადრატების რაოდენობა 10^{2n} -ს უდრის, ამიტომ პატარა კვადრატის ფართობია $\frac{1}{10^{2n}}$. რადგან $a: \frac{1}{10^n} = a \cdot 10^n$ და

$b: \frac{1}{10^n} = b \cdot 10^n$ მთელი რიცხვებია, ამიტომ მართკუთხედის გვერდები შეიძლება დაიფოს ტოლ ნაწილებად, რომელთაგან თითოეულის სიგრძე $\frac{1}{10^n}$ -ის ტოლია. a გვერდზე $a \cdot 10^n$ ასეთი ნაწილი იქნება, b გვერდზე კი $b \cdot 10^n$. გვერდების დაყოფის

წერტილებზე გაავლოთ მართკუთხედის გვერდების პარალელური წრფეები. მართკუთხედის დაიყოფა პატარა კვადრატებად, რომელთა გვერდია $\frac{1}{10^n}$, მათი რაოდენობა კი არის $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n$. მართკუთხედის ფართობი უდრის მასში შემავალი პატარა კვადრატების ფართობთა ჯამს. რადგან პატარა კვადრატის ფართობია $\frac{1}{10^{2n}}$, ხოლო მათი რაოდენობაა $ab \cdot 10^{2n}$, ამიტომ მართკუთხედის ფართობია

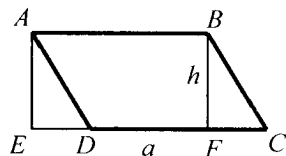
$$ab \cdot 10^{2n} \cdot \frac{1}{10^{2n}} = ab.$$

ვთქვათ, ახლა მართკუთხედის a და b გვერდებიდან ერთი მაინც უსასრულო ათწილადით გამოისახება. a_1 -ითა და a_2 -ით აღვნიშნოთ a რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობები ნაკლებობით და მეტობით n ათობითი ნიშნის სიზუსტით. b რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობები იმავე სიზუსტით b_1 -ითა და b_2 -ით აღვნიშნოთ. იმ მართკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდებია a_1 , b_1 მოცემული მართკუთხედის ფართობზე ნაკლებია, რადგან იგი მოცემული მართკუთხედის შიგნით შეიძლება მოთავსდეს, ხოლო იმ მართკუთხედის ფართობი, რომლის გვერდებია a_2 , b_2 მოცემული მართკუთხედის ფართობზე მეტია, რადგან მოცემული მართკუთხედი შეიძლება მოთავსდეს მასში. დამტკიცებულის თანახმად a_1 და b_1 გვერდების მქონე მართკუთხედის ფართობი $a_1 b_1$ -ს უდრის. a_2 და b_2 გვერდების მქონე მართკუთხედის ფართობი კი $a_2 b_2$ -ს. ამრიგად მოცემული მართკუთხედის S ფართობი $a_1 b_1$ -სა და $a_2 b_2$ -ს შორის არის მოთავსებული. რადგან, როცა n საკმარისად დიდია, $a_1 b_1$ და $a_2 b_2$ გვაძლევს ab -ს მიახლოებით მნიშვნელობას ნებისმიერი წინასწარ მოცემული სიზუსტით, ამიტომ $S=ab$.

II. პარალელოგრამის ფართობი

თეორემა 20.1. პარალელოგრამის ფართობი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია, ე. ი. $S=ah$.

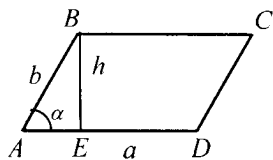
დამტკიცება. ვთქვათ, $ABCD$ პარალელოგრამის A კუთხე მახვილია (ნახ. 115). A წვეროდან DC წრფეზე დავუშვათ AE სიმაღლე. $ABCE$ ტრაპეციის ფართობი $ABCD$ პარალელოგრამისა და ADE სამკუთხედის ფართობთა ჯამის ტოლია. B წვეროდან დავუშვათ BF სიმაღლე, მაშინ $ABCE$ ტრაპეციის ფართობი $ABFE$



ნახ. 115

მართკუთხედისა და BCF სამკუთხედის ფართობთა ჯამის ტოლია. ADE და BCF მართკუთხა სამკუთხედები ტოლია ჰიპოტენუზითა და კათეტით, მაშასადამე, მათი ფართობებიც ტოლია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი $ABFE$ მართკუთხედის ფართობის ტოლია, ანუ $AB \cdot BF$ ნამრავლს უდრის. თეორემა დამტკიცებულია.

ხშირად საჭიროა პარალელოგრამის ფართობის გამოთვლა, როდესაც ცნობილია პარალელოგრამის ორი გვერდი და მათ შორის მდებარე კუთხე.



ნახ. 116

ვთქვათ პარალელოგრამის a და b გვერდებს შორის მდებარე α კუთხე მახვილია (ნახ. 116). თუ a გვერდზე დავუშვათ h სიმაღლე, მაშინ პარალელოგრამის ფართობისათვის გვექნება

$$S=ah.$$

ABE მართკუთხა სამკუთხედიდან $h=b \sin \alpha$,

ამიტომ $S=ab \sin \alpha$.

ეს ფორმულა სამართლიანია მაშინაც, როდესაც α კუთხე ბლაგვია. მართლაც, ამ შემთხვევაში პარალელოგრამის მახვილი კუთხე $(180^\circ - \alpha)$ -ს ტოლია, ხოლო $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

ამრიგად, პარალელოგრამის S ფართობი მისი a და b გვერდებისა და მათ შორის მდებარე α კუთხის სინუსის ნამრავლის ტოლია, ე. ი.

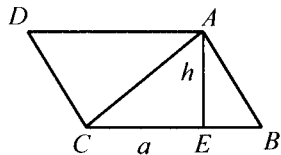
$$S=ab \sin \alpha.$$

III. სამკუთხედის ფართობი

თეორემა 20.2. სამკუთხედის ფართობი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ნახევრის ტოლია,

ე. ი. $S = \frac{1}{2}ah$.

დამტკიცება. ვთქვათ, ABC მოცემული სამკუთხედი. შევავსოთ ეს სამკუთხედი $ABCD$ პარალელოგრამად, ისე როგორც 117-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. პარალელოგრამის ფართობი ABC და CDA სამკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია. რადგან ეს სამკუთხედები ტოლია, ამიტომ ABC სამკუთხედის ფართობი $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობის ნახევარს უდრის. პარალელოგრამის სიმაღლე, რომელიც BC გვერდზეა დაშვებული,



ნახ. 117

სამკუთხედის BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია. ე. ი.

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AE = \frac{1}{2}ah. \text{ თეორემა დამტკიცებულია.}$$

რადგან a და b გვერდებისა და მათ შორის მდებარე α კუთხის მქონე სამკუთხედის ფართობი უდრის იმავე გვერდებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის მქონე პარალელოგრამის ფართობის ნახევარს, ამიტომ სამკუთხედის S ფართობი შეიძლება გამოითვალოს ფორმულით:

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha.$$

შევნიშნოთ, რომ, თუ სამკუთხედი ტოლგვერდაა, მაშინ $a=b$ და $\alpha=60^\circ$. ამიტომ ტოლგვერდა სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

გამოვიყვანოთ სამკუთხედის ფართობის გამოსათვლელი კიდევ ერთი ფორმულა:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

სადაც a , b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო p ნახევარპერიმეტრი. ამ ფორმულას ჰერონის ფორმულა ეწოდება.

გვაქვს

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma,$$

სადაც γ სამკუთხედის კუთხეა, რომელიც c გვერდის პირდაპირ მდებარეობს. კოსინუსების თეორემის მიხედვით

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

აქედან

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \\ \sin^2 \gamma &= 1 - \cos^2 \gamma = (1 + \cos \gamma)(1 - \cos \gamma) = \\ &= \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \times \\ &\times \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = \\ &= \frac{1}{4a^2b^2} (c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

თუ შევნიშნავთ, რომ $(a+b+c)=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $c-a+b=2p-2a$, მივიღებთ:

$$\sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ამრიგად,

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

სამკუთხედის S ფართობის საშუალებით მასზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების R და r რადიუსები გამოითვლება ფორმულით:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{S}{p}.$$

სადაც a , b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო p ნახევარპერიმეტრი.

გამოვიყენოთ პირველი ფორმულა. როგორც ვიცით

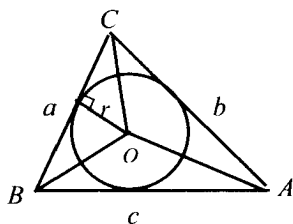
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha},$$

სადაც α სამკუთხედის a გვერდის მოპირდაპირე

კუთხეა (თეორემა 18.4). თუ შევნიშნავთ, რომ $2bc \sin \alpha = 4S$, მივი-

$$\text{ღებთ } R = \frac{abc}{4S}.$$

გამოვიყენოთ მეორე ფორმულა. ABC სამკუთხედის ფართობი OAB , OBC და OCA სამკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია (ნახ. 118).



ნახ. 118

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr =$$

$$= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rp.$$

ქ. ი. $S = pr$. აქედან $r = \frac{S}{p}$.

ამრიგად, სამკუთხედის ფართობი მისი ნახევარპერიმეტრისა და ნახაზული წრეწირის რადიუსის ნამრავლის

ტოლია.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ თუ მრავალკუთხედში ნახაზულია წრეწირი, მაშინ მრავალკუთხედის ფართობი მისი ნახევარპერიმეტრისა და ნახაზული წრეწირის რადიუსის ნამრავლის ტოლია.

IV. ტრაპეციის ფართობი

თეორემა 20.3. ტრაპეციის ფართობი მისი ფუძეების ნახევარჯამისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია, ქ. ი.

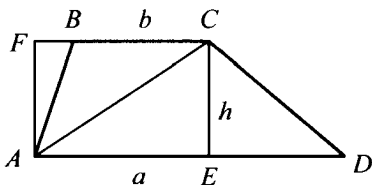
$$S = \frac{a+b}{2}h.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $ABCD$ მოცემული ტრაპეციაა (ნახ. 119). გაავლოთ AC დიაგონალი. ტრაპეციის ფართობი ABC და ACD სამკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია. ACD სამკუთხედის

ფართობია $\frac{1}{2}AD \cdot CE$, ABC სამკუ-

თხედის ფართობი კი $-\frac{1}{2}BC \cdot AF$.

ამ სამკუთხედების CE და AF სიმაღლეები ტრაპეციის h სიმაღლის ტოლია. მაშასადამე,



ნახ. 119

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot h + \frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{AD+BC}{2}h = \frac{a+b}{2}h.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. ტრაპეციის ფართობი მისი შუამონაკვეთის და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

V. ნებისმიერი ოთხკუთხედის ფართობი

თეორემა 20.4. ნებისმიერი ოთხკუთხედის ფართობი მისი დიაგონალებისა და მათ შორის მდებარე კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია, ე. ი.

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha .$$

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია $ABCD$ ოთხკუთხედი. გაავლოთ AC და BD დიაგონალები, რომელთა შორის ერთ-ერთი კუთხე აღვნიშნოთ α -თი (ნახ. 120). $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი უდრის მიღებული ოთხი სამკუთხედის ფართობთა ჯამს, ე. ი.

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} +$$

$$+ S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \sin \alpha +$$

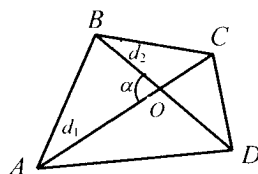
$$+ \frac{1}{2} BO \cdot CO \sin (180^\circ - \alpha) +$$

$$+ \frac{1}{2} CO \cdot DO \sin \alpha +$$

$$+ \frac{1}{2} AO \cdot DO \sin (180^\circ - \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} BO (AO + CO) \sin \alpha + \frac{1}{2} DO (AO + CO) \sin \alpha =$$

$$\frac{1}{2} (AO + CO) (BO + DO) \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha .$$



ნახ. 120

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. რომლის ფართობი დიაგონალების ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

VI. მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრებისა და ფართობების შეფარდება

თეორემა 20.5. მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრების შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ $A_1 A_2 \dots A_n$ და $B_1 B_2 \dots B_n$ მსგავსი მრავალკუთხედებია. ამ მრავალკუთხედების მსგავსებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{A_2 A_3}{B_2 B_3} = \dots = \frac{A_n A_1}{B_n B_1}.$$

აქედან, ტოლ ფარდობათა თვისების გამოყენებით მივიღებთ:

$$\frac{A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1}{B_1 B_2 + B_2 B_3 + \dots + B_n B_1} = \frac{A_1 A_2}{B_1 B_2} = \frac{A_2 A_3}{B_2 B_3} = \dots = \frac{A_n A_1}{B_n B_1}.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 20.6. მსგავსი მრავალკუთხედების ფართობთა შეფარდება შესაბამისი გვერდების შეფარდების კვადრატის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ F_1 მრავალკუთხედი F_2 მრავალკუთხედის მსგავსია. F_1 მრავალკუთხედი დავეთ საშუალო მრავალკუთხედად: $\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_m'$. მსგავსების გარდაქმნას, რომელსაც F_1 მრავალკუთხედი F_2 -ში გადაჰყავს, ამ საშუალო მრავალკუთხედის $\Delta_1'', \Delta_2'', \dots, \Delta_m''$ საშუალო მრავალკუთხედებში გადაიყვანს. F_1 მრავალკუთხედის ფართობი $\Delta_1', \Delta_2', \dots, \Delta_m'$ საშუალო მრავალკუთხედების ფართობთა ჯამის ტოლია, F_2 მრავალკუთხედის ფართობი კი — $\Delta_1'', \Delta_2'', \dots, \Delta_m''$ საშუალო მრავალკუთხედების ფართობთა ჯამისა.

ვთქვათ, მსგავსების კოეფიციენტი k . თუ Δ_n' საშუალო მრავალკუთხედის გვერდია a_n' , ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლე h_n' , მაშინ Δ_n'' საშუალო მრავალკუთხედის გვერდია a_n'' და სიმაღლე იქნება: $a_n'' = k a_n'$, $h_n'' = k h_n'$. აქედან გამომდინარე

$$S(\Delta_n'') = \frac{1}{2} a_n'' h_n'' = \frac{1}{2} k a_n' k h_n' = k^2 \cdot \frac{1}{2} a_n' h_n' = k^2 S(\Delta_n'),$$

ე. ი. $S(\Delta_n'') = k^2 S(\Delta_n')$, $(n=1, 2, \dots, m)$.

თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მივიღებთ:

$$S(F_2) = k^2 S(F_1),$$

ანუ

$$\frac{S(F_2)}{S(F_1)} = k^2.$$

აქედან თეორემის სამართლიანობა ცხადია, რადგან k შესაბამისი გვერდების შეფარდების ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი. მსგავსი საშუალო მრავალკუთხედების ფართობთა შეფარდება შესაბამისი გვერდების ან სიმაღლეების ან მედიანების ან ბისექტრისების ან პერიმეტრების შეფარდების კვადრატის ტოლია.

§21. წესიერი მრავალკუთხედები

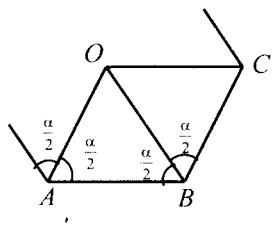
განსაზღვრება. მრავალკუთხედს წესიერი ეწოდება, თუ მისი ყველა გვერდი ტოლია და ყველა კუთხე ტოლია.

განსაზღვრება. მრავალკუთხედს, რომლის ყველა წვეროს წვეროსზე მდებარეობს წვეროში ნახაზული მრავალკუთხედი ეწოდება, ხოლო წვეროს – მრავალკუთხედზე შემოხაზული.

განსაზღვრება. მრავალკუთხედს, რომლის ყველა გვერდი წვეროს ეხება წვეროსზე შემოხაზული მრავალკუთხედი ეწოდება, ხოლო წვეროს – მრავალკუთხედში ნახაზული.

თეორემა 21.1. წესიერი მრავალკუთხედი წვეროსში ნახაზული და წვეროსზე შემოხაზული მრავალკუთხედი.

დამტკიცება. ვთქვათ, A და B მრავალკუთხედის ორი მეზობელი წვეროა (ნახ. 121). A და B წვეროებიდან გავავლოთ მრავალკუთხედის კუთხეთა ბისექტრისები. ვთქვათ, O მათი გადაკვეთის წერტილია. AOB ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძეა AB და ფუძესთან მდებარე კუთხეები $\frac{\alpha}{2}$ -ს



ნახ. 121

უდრის, სადაც α მრავალკუთხედის კუთხეა. O წერტილი B წვეროს მეზობელ C წვეროსთან შევეართოთ. ABO და CBO სამკუთხედები ტოლია, სამკუთხედების ტოლობის პირველი ნიშნის მიხედვით. OB მათი საერთო გვერდია; AB და BC გვერდები ტოლია, როგორც წესიერი მრავალკუთხედის გვერდები, B წვეროსთან მდებარე კუთხეები კი $\frac{\alpha}{2}$ -ს უდრის. სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ OBC სამკუთხედი ტოლფერდაა და C წვეროსთან მდებარე კუთხე $\frac{\alpha}{2}$ -ს უდრის. მაშასადამე, CO არის მრავალკუთხედის C კუთხის ბისექტრისა.

ახლა O წერტილი C წვეროს მეზობელ D წვეროსთან შევეართოთ და ანალოგიურად დავამტკიცოთ, რომ COD სამკუთხედი ტოლფერდაა და DO მრავალკუთხედის D კუთხის ბისექტრისაა და ა. შ. საბოლოოდ მივიღებთ, რომ ყოველი სამკუთხედი, რომლის ერთი გვერდია მრავალკუთხედის გვერდი, ხოლო მისი მოპირდაპირე წვეროა O წერტილი, ტოლფერდაა. ყველა ასეთი სამკუთხედის ფერდები ტოლია. აქედან

გამომდინარეობს, რომ მრავალკუთხედის ყველა წვერო მდებარეობს წრეწირზე, რომლის ცენტრია O და რადიუსი სამკუთხედის ფერდის ტოლია.

რადგან AOB , BOC ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედების ფუძეებზე დაშვებული სიმაღლეები ტოლია, ამიტომ მრავალკუთხედის ყველა გვერდი ეხება წრეწირს, რომლის ცენტრია O და რადიუსი სამკუთხედების ფუძეებზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემის მტკიცებიდან გამომდინარეობს, რომ წესიერი მრავალკუთხედის კუთხეების ბისექტრისები და გვერდების შუამართობები ერთ წერტილში იკვეთებიან და ეს წერტილი შემოხაზული და ნახაზული წრეწირის ცენტრს წარმოადგენს. ამ წერტილს წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრი ეწოდება.

გამოვსახოთ წესიერი n -კუთხედის a_n გვერდი შემოხაზული წრეწირის R რადიუსისა და ნახაზული წრეწირის r რადიუსის მიხედვით (ნახ. 122).

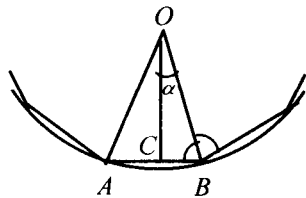
რადგან $\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$, ამიტომ

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}.$$

BOC მართკუთხა სამკუთხედიდან

$$\frac{a_n}{2} = BC = OB \sin \alpha = R \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$\frac{a_n}{2} = BC = OC \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$



ნახ. 122

ქ. 0.

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

წესიერი სამკუთხედისათვის $n=3$.

$$a_3 = 2R \sin 60^\circ = R\sqrt{3}; \quad a_3 = 2r \operatorname{tg} 60^\circ = 2r\sqrt{3}.$$

წესიერი ოთხკუთხედისათვის (კვადრატისათვის) $n=4$,

$$a_4 = 2R \sin 45^\circ = R\sqrt{2}; \quad a_4 = 2r \operatorname{tg} 45^\circ = 2r.$$

წესიერი ექვსკუთხედისათვის $n=6$,

$$a_6 = 2R \sin 30^\circ = R; \quad a_6 = 2r \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

BOC მართკუთხა სამკუთხედიდან ცხადია აგრეთვე, რომ

$$r = R \cos \alpha = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

გამოვსახოთ ახლა წესიერი n -კუთხედის S_n ფართობი შემოხაზული და ნახაზული წრეწირების რადიუსების მიხედვით (ნახ.122).

$$S_n = n \cdot S_{AOB} = n \cdot \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin 2\alpha = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n};$$

$$S_n = n \cdot S_{AOB} = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OC = n \cdot OC \operatorname{tg} \alpha \cdot OC = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

მ. ო.

$$S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}; \quad S_n = nr^2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

§22. წრეწირის სიგრძე. წრის ფართობი

წრეწირის სიგრძეზე თვალსაჩინო წარმოდგენა შემდეგნაირად მიიღება. წარმოვიდგინოთ წრეწირის ფორმის ძაფი. გავჭრათ იგი და გავჭიმოთ. მიღებული მონაკვეთის სიგრძე არის წრეწირის სიგრძე, როგორ ვიპოვოთ წრეწირის სიგრძე, თუ ვიცით მისი რადიუსი? თვალსაჩინო მოსაზრებიდან ცხადია, რომ წრეწირის სიგრძე მასში ნახაზული საკმარისად მცირე გვერდებიანი მრავალკუთხედის პერიმეტრისაგან უმნიშვნელოდ განსხვავდება. აქედან გამომდინარე, შეიძლება დავამტკიცოთ წრეწირის სიგრძის შემდეგი თვისება.

თეორემა 22.1. წრეწირის სიგრძის შეფარდება მის დიამეტრთან ნებისმიერი ორი წრეწირისათვის ერთი და იგივეა.

დამტკიცება. ავიღოთ ორი ნებისმიერი წრეწირი. ვთქვათ R_1 და R_2 მათი რადიუსებია, l_1 და l_2 კი — წრეწირების სიგრძეებია.

დავუშვათ, თეორემა მცდარია და $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$. მაგალითად

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \quad (1)$$

აღებულ წრეწირებში ნახვახოთ წესიერი მრავალკუთხედები, რომელთა გვერდების n რიცხვი საკმარისად დიდია. თუ n ძალიან დიდია, მაშინ ამ წრეწირების სიგრძეები ნახაზული მრავალკუთხედების P_1 და P_2 პერიმეტრებისაგან უმნიშვნელოდ განსხვავდება, ამიტომ (1) უტოლობა არ დაირღვევა, თუ მასში l_1 -ს P_1 -ით შევცვლით, ხოლო l_2 -ს P_2 -ით:

$$\frac{P_1}{2R_1} < \frac{P_2}{2R_2}. \quad (2)$$

P_1 და P_2 პერიმეტრები წრეწირების რადიუსებით გამოვსახოთ. თუ ნახაზული წესიერი მრავალკუთხედების გვერდებია a_n და b_n , მაშინ:

$$P_1 = n a_n = n \cdot 2R_1 \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P_2 = n b_n = n \cdot 2R_2 \sin \frac{180^\circ}{n};$$

აქედან

$$\frac{P_1}{2R_1} = n \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad \frac{P_2}{2R_2} = n \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

ქ. ო.

$$\frac{P_1}{2R_1} = \frac{P_2}{2R_2}.$$

ეს კი (2) უტოლობას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია. მიღებულია, რომ წრეწირის სიგრძის ღიაპეტრთან შეფარდება ბერძნული π ასოთი (იკითხება “პი”) აღინიშნოს:

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

π ირაციონალური რიცხვია, მისი მიახლოებითი მნიშვნელობაა $\pi \approx 3,1416$.

ამრიგად, წრეწირის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით:

$$l = 2\pi R.$$

ვიპოვოთ წრეწირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც n° -იან ცენტრალურ კუთხეს შეესაბამება. გაშლილ კუთხეს ნახევარწრეწირის სიგრძე შეესაბამება. მაშასადამე 1° -იან

კუთხეს $\frac{\pi R}{180}$ სიგრძის რკალი შეესაბამება, n° -იან კუთხეს კი

შეესაბამება რკალი, რომლის სიგრძეა:

$$l = \frac{\pi R}{180} n.$$

განსაზღვრება. სიბრტყის ყველა იმ წერტილისაგან შემდგარ ფიგურას, რომელიც მოცემული წერტილიდან მოცემულ მანძილზე მეტად არ არის დაშორებული, წრე ეწოდება. ამ წერტილს წრის ცენტრი ეწოდება, მოცემულ მანძილს კი – წრის რადიუსი.

წრის საზღვარია წრეწირი, რომელსაც იგივე ცენტრი და რადიუსი აქვს.

ვიპოვოთ R რადიუსიანი წრის S ფართობი. წრეზე შემოვხაზოთ F_1 წესიერი n -კუთხედი და წრეში ნავხაზოთ F_2 წესიერი n -კუთხედი (ნახ. 123). F_1 მრავალკუთხედი წრეს მოიცავს და, მაშასადამე მისი ფართობი წრის ფართობზე მეტია. F_2 მრავალკუთხედი წრეში შედის და ამიტომ მისი ფართობი წრის ფართობზე ნაკლებია. მრავალკუთხედების ფართობებია

$$S_1 = \frac{1}{2} P_1 R, \quad S_2 = \frac{1}{2} P_2 r,$$

სადაც r არის F_2 მრავალკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსი, P_1 და P_2 კი F_1 და F_2 მრავალკუთხედების პერიმეტრებია.

ვთქვათ, F_1 და F_2 მრავალკუთხედების გვერდებია b და a , ხოლო $\angle AOB = \alpha$.

ცხადია, რომ $\angle BAC = \alpha = \frac{180^\circ}{n}$. ABC

სამკუთხედიდან (ნახ. 123) ვღებულობთ:

$$AB = \frac{AC}{\cos \alpha}, \text{ ანუ } \frac{b}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos \alpha}.$$

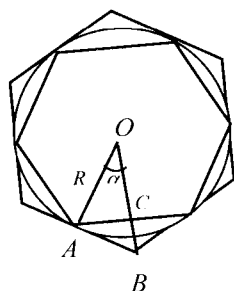
აქედან $nb = \frac{na}{\cos \alpha}$, ანუ $P_1 = \frac{P_2}{\cos \alpha}$. ახლა OAC სამკუთხედიდან ვღებულობთ: $r = OC = R \cos \alpha$, საიდანაც მივიღებთ:

$$S_1 = \frac{1}{2} P_2 \frac{R}{\cos \alpha}, \quad S_2 = \frac{1}{2} P_2 R \cos \alpha.$$

საკმარისად დიდი n -ისათვის P_2 პერიმეტრი რაგინდ მცირედ განსხვავდება წრეწირის სიგრძისაგან, $\cos \alpha$ რაგინდ მცირედ განსხვავდება 1-ისაგან, რადგან α კუთხე რაგინდ მცირეა.

მაშასადამე, S_1 რაგინდ მცირედ განსხვავდება $\frac{IR}{2}$ -ისაგან, სადაც I წრის წრეწირის სიგრძეა. ამავე მოსაზრებათა გამო S_2 რაგინდ მცირედ განსხვავდება $\frac{IR}{2}$ -ისაგან. წრის S ფართობი მოთავსებულია S_1 -სა და S_2 -ს შორის, ამიტომ ისიც რაგინდ მცირედ განსხვავდება $\frac{IR}{2}$ -ისაგან. ეს კი მხოლოდ მაშინ

შეიძლება შესრულდეს, როცა $S = \frac{IR}{2}$.



ნახ. 123

ამრიგად წრის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{IR}{2} = \pi R^2.$$

განსაზღვრება. წრის ნაწილს, რომელიც ცენტრალური კუთხის შიგნით მდებარეობს წრიული სექტორი ეწოდება (ნახ. 124).

წრიული სექტორის ფართობი იმდენჯერ ნაკლებია შესაბამისი წრის ფართობზე, რამდენჯერაც ნაკლებია ცენტრალური კუთხე სრულ კუთხეზე ან რამდენჯერაც ნაკლებია სექტორის რკალის სიგრძე შესაბამისი წრეწირის სიგრძეზე. გამომდინარე აქედან წრიული სექტორის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha,$$

სადაც R წრის რადიუსია, α კი შესაბამისი ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომა. თუ α ცენტრალური კუთხის რადიანული ზომაა, მაშინ

$$S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 \alpha,$$

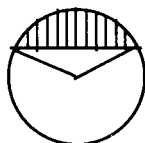
ხოლო, თუ სექტორის რკალის სიგრძე l -ის ტოლია, მაშინ

$$S = \pi R^2 \cdot \frac{l}{2\pi R} = \frac{1}{2} Rl.$$

განსაზღვრება. წრის და ნახევარსიბრტყის საერთო ნაწილს წრიული სეგმენტი ეწოდება (ნახ. 125).



ნახ. 124



ნახ. 125

იმ სეგმენტის ფართობი, რომელიც ნახევარწრის ტოლი არ არის, გამოითვლება ფორმულით

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \alpha \pm S_{\Delta},$$

სადაც α ცენტრალური კუთხის გრადუსული ზომაა, რომელიც ამ წრიული სეგმენტის რკალს შეესაბამება, S_{Δ} კი იმ სამკუთხედის ფართობია, რომლის წვეროები წრის ცენტრისა და შესაბამისი სექტორის შემომსაზღვრელი რადიუსების ბოლოებზე მდებარეობს. “-” ნიშანი უნდა ავიდეთ მაშინ, როცა $\alpha < 180^\circ$, “+” ნიშანი კი მაშინ, როცა $\alpha > 180^\circ$.

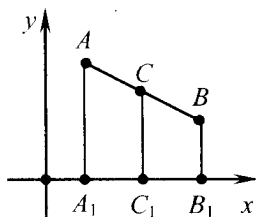
§23. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა

როგორც ცნობილია (მათემატიკა, I ნაწილი), სიბრტყეზე მდებარე ორი ურთიერთპერპენდიკულარული საკოორდინატო ღერძი ქმნის ე. წ. მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას, რომლის საშუალებითაც შეიძლება დამყარდეს ურთიერთცალსახა შესაბამისობა ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ (x, y) წყვილებსა და სიბრტყის წერტილებს შორის. ასეთ სისტემას აგრეთვე დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემას უწოდებენ, ხოლო სიბრტყის ნებისმიერი (x, y) წერტილის x და y კოორდინატებს – დეკარტის მართკუთხა კოორდინატებს.

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ხშირად ამარტივებს ფუნქციათა თვისებების დადგენას, საშუალებას გვაძლევს გამოვიკვლიოთ გეომეტრიულ ფიგურათა ურთიერთმდებარეობა, ვიპოვოთ მონაკვეთის შუაწერტილი, მანძილი ორ წერტილს შორის და ა. შ. ამით საშუალება გვეძლევა მოვახდინოთ გეომეტრიულ ფიგურათა ფორმის და მათი ურთიერთმდებარეობის ანალიზი, თუ ცნობილია ფიგურათა განტოლებები.

I. მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები

ვთქვათ, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ ორი ნებისმიერი წერტილია და $C(x, y)$ არის AB მონაკვეთის შუაწერტილი. ვიპოვოთ C წერტილის x, y კოორდინატები. დავუშვათ, AB მონაკვეთი Oy



ნახ. 126

ტოლობიდან მივიღებთ:

ღერძის პარალელური არ არის, ანუ $x_1 \neq x_2$, A, B, C წერტილებზე გავავლოთ Oy ღერძის პარალელური წრფეები (ნახ. 126). ეს წრფეები Ox ღერძს $A_1(x_1, 0)$, $B_1(x_2, 0)$, $C_1(x, 0)$ წერტილებში გადაკვეთს. თაღესის თეორემის თანახმად C_1 წერტილი A_1B_1 მონაკვეთის შუაწერტილია.

რადგან C_1 წერტილი A_1B_1 მონაკვეთის შუაწერტილია, ამიტომ $A_1C_1 = B_1C_1$, ამ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

თუ $x_1 = x_2$, ანუ AB მონაკვეთი y ღერძის პარალელურია, მაშინ A , B , C წერტილებს ერთი და იგივე აბსცისა აქვს. მაშასადამე, ფორმულა ამ შემთხვევაშიც ხწორია. C წერტილის ორდინატი ანალოგიურად მოიძებნება A , B , C წერტილებზე უნდა გავავლოთ OX ღერძის პარალელური წრფეები, მივიღებთ:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

ამრიგად, $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილების შემავრთებელი მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები გამოითვლება ფორმულებით:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

II. მანძილი ორ წერტილს შორის

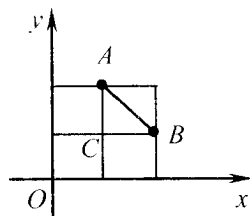
ვთქვათ, XOY სიბრტყეზე მოცემულია $A(x_1, y_1)$ და $B(x_2, y_2)$ წერტილები. A და B წერტილებს შორის მანძილი გამოვსახოთ ამ წერტილების კოორდინატებით.

დავუშვათ, რომ $x_1 \neq x_2$ და $y_1 \neq y_2$. A და B წერტილებზე გავავლოთ კოორდინატთა ღერძების პარალელური წრფეები და მათი გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილი C -თი აღვნიშნოთ (ნახ. 127). C და A წერტილებს შორის მანძილია $|y_1 - y_2|$, ხოლო C და B წერტილებს შორის მანძილია $|x_1 - x_2|$. თუ ABC სამკუთხედისათვის პითაგორას თეორემას გამოვიყენებთ, მივიღებთ:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

სადაც d არის A და B წერტილებს შორის მანძილი.

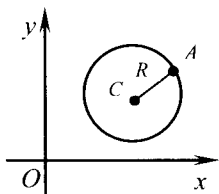
ცხადია, რომ მიღებული ფორმულა სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა $x_1 = x_2$ ან $y_1 = y_2$.



ნახ. 127

III. წრეწირის განტოლება

შევაღვიწიოთ R რადიუსიანი წრეწირის განტოლება, რომლის ცენტრი $C(a,b)$ წერტილში მდებარეობს (ნახ.128). წრეწირზე ავიღოთ ნებისმიერი $A(x,y)$ წერტილი. ამ წერტილიდან C



ნახ. 128

ცენტრამდე მანძილი R -ის ტოლია. A წერტილიდან C -მდე მანძილის კვადრატია არის $(x-a)^2+(y-b)^2$, ამიტომ წრეწირის ყოველი A წერტილის x, y კოორდინატები აკმაყოფილებენ განტოლებას:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

პირიქით, ყოველი A წერტილი, რომლის კოორდინატები ამ განტოლებას აკმაყოფილებს, წრეწირს ეკუთვნის, რადგან ამ წერტილიდან C წერტილამდე მანძილი R -ს უდრის. აქედან გამომდინარეობს, რომ მიღებული განტოლება მართლაც იმ წრეწირის განტოლებაა, რომლის ცენტრია C და რადიუსი $- R$.

შევნიშნოთ, რომ თუ წრეწირის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა, მაშინ წრეწირის განტოლებას აქვს სახე:

$$x^2+y^2=R^2.$$

§24. აგების ამოცანები

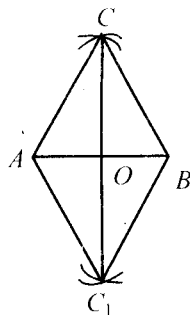
აგების ამოცანებში მოითხოვება გეომეტრიული ფიგურის აგება მოცემული სახაზავი ხელსაწყოების მეშვეობით. უმეტესად ასეთი ხელსაწყოებია სახაზავი და ფარგალი. ამოცანის ამოხსნისას არსებითია არა იმდენად ფიგურის აგება, რამდენადაც იმის დადგენა, თუ როგორ უნდა ავაგოთ და შესაბამისი დამტკიცება. ამოცანა ამოხსნილად ჩაითვლება, თუ დადგენილია ფიგურის აგების ხერხი და დამტკიცებულია, რომ მითითებული აგებების შესრულების შედეგად მართლაც მოთხოვნილი თვისებების მქონე ფიგურა მიიღება.

სახაზავით, როგორც გეომეტრიულ აგებათა ხელსაწყოთი, შეიძლება, გავავლოთ ნებისმიერი წრფე (მოცემულ წერტილზე გავლებული ნებისმიერი წრფე), მოცემულ ორ წერტილზე გაშვადი წრფე. სხვა ოპერაციის შესრულება სახაზავით არ შეიძლება. კერძოდ, სახაზავით არ შეიძლება მონაკვეთის გადაზომა, თუნდაც ამ სახაზავს დანაყოფები ჰქონდეს.

ფარგლით, როგორც გეომეტრიულ აგებათა ინსტრუმენტით, შეიძლება მოცემული ცენტრისა და მოცემული რადიუსის მქონე წრეწირის აგება. კერძოდ, ფარგლით შეიძლება მოცემულ წრეწივზე მოცემული წერტილიდან მოცემული სიგრძის მონაკვეთის გადაზომვა.

განვიხილოთ აგების უმარტივესი ამოცანები.

1. **მონაკვეთის გაყოფა შუაზე.** ვთქვათ, AB მოცემული მონაკვეთია. A და B წერტილებიდან AB რადიუსით შემოვსახოთ წრეწირები (ნახ. 129). ვთქვათ, C და C_1 ამ წრეწირების გადაკვეთის წერტილებია. ეს წერტილები AB წრეწვის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ. CC_1 მონაკვეთი AB წრეწვის რაიმე O წერტილში კვეთს, ეს წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია, რადგან C და C_1 წერტილები AB მონაკვეთის შუამართობზე მდებარეობენ.

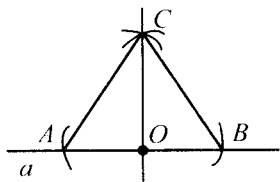


ნახ. 129

2. **მოცემულ წერტილზე მოცემული წრეწვის მართობული წრეწის გაღება.** ვთქვათ მოცემულია O წერტილი და რაიმე a წრეწი. შესაძლებელია ორი შემთხვევა:

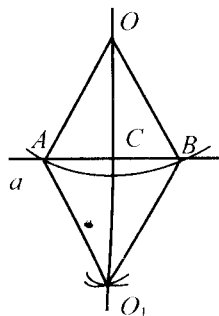
- 1) O წერტილი a წრეწივზე მდებარეობს;
- 2) O წერტილი a წრეწივზე არ მდებარეობს.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. O წერტილიდან ნებისმიერი რადიუსით შემოვსახოთ წრეწირი (ნახ. 130). იგი წრეწვს A და B წერტილებში გადაკვეთს. ამ წერტილებიდან AB რადიუსით შემოვსახოთ წრეწირები. ვთქვათ C მათი გადაკვეთის წერტილია. საძიებელი წრეწი O და C წერტილებზე გადის, რადგან C წერტილი AB მონაკვეთის შუამართობზე მდებარეობს.



ნახ. 130

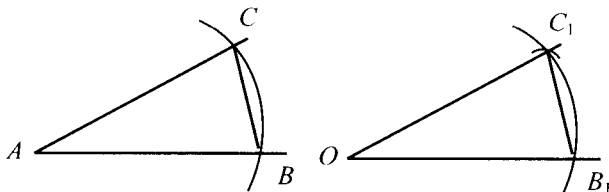
განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. O წერტილიდან შემოვსახოთ წრეწირი, რომელიც გადაკვეთს a წრეწვს (ნახ. 131). ვთქვათ, A და B ამ წრეწირისა და a წრეწვის გადაკვეთის წერტილებია. A და B წერტილებიდან იმავე რადიუსით შემოვსახოთ წრეწირები. ვთქვათ, O_1 მათი გადაკვეთის წერტილია, რომელიც იმ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობს, რომელშიც არ მდებარეობს O წერტილი.



ნახ. 131

საძიებელი წრე O და O_1 წერტილებზე გადის, რადგან ეს წერტილები AB მონაკვეთის შუამართობზე მდებარეობენ.

3. მოცემული სხივიდან, მოცემულ ნახევარსიბრტყეში მოცემული კუთხის ტოლი კუთხის ზგება. გაავლოთ რაიმე წრეწირი, რომლის ცენტრი მოცემული A კუთხის წვეროშია (ნახ. 132). ვთქვათ B და C წრეწირის და კუთხის გვერდების გადაკვეთის წერტილებია. AB

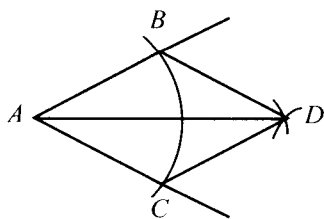


ნახ. 132

რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირი, რომლის ცენტრი მოცემული სხივის საწყის O წერტილშია (ნახ. 132). ამ წრეწირისა და მოცემული სხივის გადაკვეთის წერტილი B_1 -ით აღვნიშნოთ. შემოვხაზოთ წრეწირი, რომლის ცენტრია B_1 და რადიუსი BC . აგებული წრეწირების გადაკვეთის წერტილი, რომელიც აღნიშნულ ნახევარსიბრტყეშია, საძიებელი კუთხის გვერდზე მდებარეობს. ამის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ ABC და OB_1C_1 სამკუთხედები ტოლია სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად.

A და O კუთხეები ამ სამკუთხედების შესაბამისი კუთხეებია, ამიტომ $\angle A = \angle O$.

4. კუთხის ბისექტრისის აგება. მოცემული კუთხის A წვეროდან, როგორც ცენტრიდან შემოვხაზოთ ნებისმიერი რადიუსის წრეწირი (ნახ. 133). ვთქვათ B და C წრეწირის და კუთხის გვერდების გადაკვეთის წერტილებია. B და C წერტილებიდან იმავე რადიუსით შემოვხაზოთ წრეწირები. ვთქვათ D წერტილი ამ წრეწირების გადაკვეთის წერტილია,

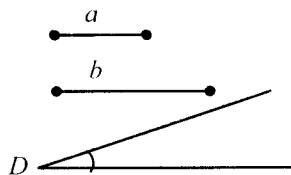


ნახ. 133

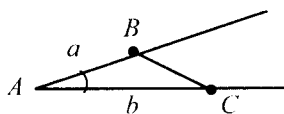
რომელიც განსხვავებულია A -საგან. თუ გაავლოთ AD სხივს, იგი A კუთხეს შუაზე გაყოფს. მართლაც ABD და ACD სამკუთხედები ტოლია სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად. ამიტომ BAD და CAD კუთხეები ტოლია.

5. სამკუთხედის აგება ორი გვერდით და მათ შორის მდებარე კუთხით.

ვთქვათ მოცემულია სამკუთხედის a და b გვერდები და მათ შორის მდებარე კუთხე D (ნახ. 134). AC სხივის მიმართ გადავდოთ D -ს ტოლი კუთხე A (ნახ. 135). ამ კუთხის გვერდებზე



ნახ. 134



ნახ. 135

A წერტილიდან გადავდოთ a -ს ტოლი AB და b -ს ტოლი AC მონაკვეთები. B და C წერტილები შევეერთოთ. ცხადია ABC სამკუთხედს აქვს a -სა და b -ს ტოლი გვერდები და მათ შორის მდებარე კუთხე არის $\angle A = \angle D$.

სამკუთხედი მარტივად აიგება აგრეთვე იმ შემთხვევაშიც, თუ მოცემულია მისი ერთი გვერდი და მასთან მდებარე ორი კუთხე, ან სამი გვერდი.

სტერეომეტრია

§25. სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები

სტერეომეტრია არის გეომეტრიის ის ნაწილი, რომელიც შეისწავლის ფიგურებს სივრცეში. სტერეომეტრიაში ისევე როგორც პლანიმეტრიაში, გეომეტრიულ ფიგურათა თვისებების დადგენა შესაბამისი თეორემების დამტკიცების გზით ხორციელდება. ამასთან საწყისს ძირითად გეომეტრიულ ფიგურათა თვისებები წარმოადგენს. ეს თვისებები აქსიომებით გამოისახება. სივრცეში ძირითადი ფიგურებია: წერტილი, წრფე, სიბრტყე. ახალი გეომეტრიული სახეობის – სიბრტყის – შემოყვანა გვაძლევს გავაფართოთ აქსიომათა სისტემა. კერძოდ, შემოგვყავს აქსიომების VI ჯგუფი, რომელიც სივრცეში სიბრტყეთა ძირითად თვისებებს გამოსახავს. ეს ჯგუფი შემდეგ საში აქსიომისაგან შედგება:

VI₁. ყოველი სიბრტყისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ამ სიბრტყეს ეკუთვნის და წერტილები, რომლებიც მას არ ეკუთვნის.

VI₂. თუ ორ სხვადასხვა სიბრტყეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ეს სიბრტყეები ერთმანეთს წრფეზე კვეთს.

VI₃. თუ ორ სხვადასხვა წრფეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ამ წრფეებზე შეიძლება სიბრტყის გაყვლა და მასთან მხოლოდ ერთი.

ამრიგად, სტერეომეტრიაში დავეყრდნობით აქსიომათა შემდეგ სისტემას:

I ჯგუფი

I₁. ყოველი წრფისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ეკუთვნის ამ წრფეს და წერტილები, რომლებიც მას არ ეკუთვნის.

I₂. ყოველ ორ წერტილზე გადის წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

II ჯგუფი

II₁. წრფეზე მდებარე სამი წერტილიდან ერთი და მხოლოდ ერთი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის.

II. წრფე სიბრტყეს ეოფს ორ ნახევარსიბრტყედ.

III ჯგუფი

III₁. ეოველ მონაკვეთს აქვს დადებითი სიგრძე. მონაკვეთის სიგრძე უდრის იმ მონაკვეთების სიგრძეების ჯამს, რომლებაც იგი ეოფა ნებისმიერი წერტილით.

III₂. ეოველ კუთხეს დადებითი გრადუსული ზომა აქვს. გაშლილი კუთხე 180°-ის ტოლია. კუთხის გრადუსული ზომა ტოლია იმ კუთხეების გრადუსული ზომების ჯამისა, რომლებაც იგი ეოფა მის გვერდებს შორის გაშავალი ნებისმიერი სხივით.

IV ჯგუფი

IV₁. ეოველ სხივზე მისი სათავიდან შეიძლება გადავლოთ მოცემული სიგრძის მონაკვეთი და მასთან მხოლოდ ერთი.

IV₂. ეოველი სხივიდან მოცემულ ნახევარსიბრტყეში შეიძლება გადავლოთ მოცემული, 180°-ზე ნაკლები, გრადუსული ზომის კუთხე და მასთან მხოლოდ ერთი.

IV₃. ეოველი სამკუთხედისათვის არსებობს მისი ტოლი სამკუთხედი, რომელსაც მოცემული მდებარეობა აქვს მოცემული სხივის მიმართ.

V ჯგუფი

V. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება ამ წრფის პარალელური ერთადერთი წრფის გაკლება.

VI ჯგუფი

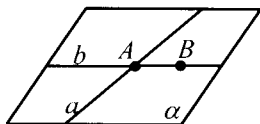
VI₁. ეოველი სიბრტყისათვის არსებობს წერტილები, რომლებიც ამ სიბრტყეს ეკუთვნის და წერტილები, რომლებიც მას არ ეკუთვნის.

VI₂. თუ ორ სხვადასხვა სიბრტყეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ეს სიბრტყეები ერთმანეთს წრფეზე კვეთს.

VI₃. თუ ორ სხვადასხვა წრფეს საერთო წერტილი აქვს, მაშინ ამ წრფეებზე შეიძლება სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთი.

დავამტკიცოთ სტერეომეტრიის აქსიომათა ზოგიერთი შედეგი.

თეორემა 25.1. წრფეზე და მასზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთი.



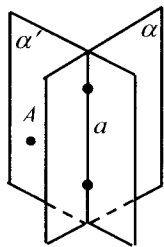
ნახ. 136

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია a წრფე და მასზე არამდებარე B წერტილი (ნახ. 136). ვთქვათ A არის a წრფის რაიმე წერტილი. I_1 აქსიომის თანახმად ასეთი წერტილი არსებობს. A და B წერტილებზე გაავლოთ b წრფე (I_2 აქსიომა). a და b წრფეები სხვადასხვაა, რადგან b წრფის B წერტილი a წრფეზე არ ძევს. a და b წრფეებს აქვთ საერთო A წერტილი. a და b წრფეებზე გაავლოთ α სიბრტყე (VI₃ აქსიომა). ეს სიბრტყე გადის a წრფეზე და B წერტილზე.

ახლა დავამტკიცოთ, რომ α სიბრტყე, რომელიც a წრფეზე და B წერტილზე გადის, ერთადერთია. დავუშვათ, რომ არსებობს α -საგან განსხვავებული სხვა α' სიბრტყე, რომელიც a წრფეზე და B წერტილზე გადის. VI₂ აქსიომის თანახმად სხვადასხვა α და α' სიბრტყეები ერთმანეთს წრფეზე კვეთს. მაშასადამე, α და α' სიბრტყეთა ნებისმიერი სამი საერთო წერტილი ერთ წრფეზე ძევს. მაგრამ B წერტილი და a წრფის ნებისმიერი ორი წერტილი ერთ წრფეზე არ ძევს. მივიღეთ წინააღმდეგობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 25.2. თუ წრფის ორი წერტილი სიბრტყეს ეკუთვნის, მაშინ ეს წრფეც ამ სიბრტყეს ეკუთვნის.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია α სიბრტყე და a წრფე, რომლის ორი წერტილიც ამ სიბრტყეს ეკუთვნის (ნახ. 137). ვთქვათ A არის a წრფეზე არამდებარე წერტილი. I_1 აქსიომის თანახმად ასეთი წერტილი არსებობს. ამ წერტილსა და a წრფეზე გაავლოთ α' სიბრტყე (თეორემა 25.1). თუ α' სიბრტყე α სიბრტყეს ემთხვევა, მაშინ a წრფე α სიბრტყეს ეკუთვნის და ამ შემთხვევაში თეორემა დამტკიცებულია. თუ α' სიბრტყე α სიბრტყეს არ ემთხვევა, მაშინ ეს სიბრტყეები ერთმანეთს რაიმე a' წრფეზე კვეთს, რომელიც a წრფის ორ წერტილს შეიცავს. I_2 აქსიომის



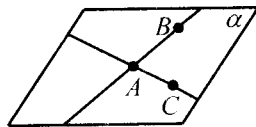
ნახ. 137

თანახმად a' წრფე ემთხვევა a -ს და, მაშასადამე, a წრფე α სიბრტყეს ეკუთვნის. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 25.2-დან გამომდინარეობს, რომ სიბრტყე და მასზე არამდებარე წრფე ან არ იკვეთებიან, ან იკვეთებიან ერთ წერტილში.

თეორემა 25.3. ერთ წრფეზე არამდებარე ნებისმიერ სამ წერტილზე შეიძლება სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთი.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია ერთ წრფეზე არამდებარე A , B და C წერტილები (ნახ. 138). გავავლოთ AB და AC წრფეები. ისინი ერთმანეთისაგან განსხვავდებიან, რადგან A , B და C წერტილები ერთ წრფეზე არ მდებარეობენ. ცხადია A , B და C წერტილები მდებარეობენ AB და AC წრფეებზე გავლებულ α სიბრტყეზე. A , B და C წერტილებზე გამავალი α სიბრტყე ერთადერთია, რადგან 25.2 თეორემის თანახმად ამ წერტილებზე გამავალი სიბრტყე შეიცავს AB და AC წრფეებს. VI_3 აქსიომის თანახმად კი ასეთი სიბრტყე ერთადერთია. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 138

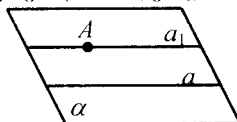
§26. წრფეებისა და სიბრტყეების პარალელურობა

I. პარალელური და აცდენილი წრფეები

განსაზღვრება. სივრცეში ორ წრფეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთ სიბრტყეზე მდებარეობენ და ერთმანეთს არ კვეთენ.

თეორემა 26.1. წრფეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს ამ წრფის პარალელური წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია a წრფე და მასზე არამდებარე A წერტილი (ნახ. 139). a წრფეზე და A წერტილზე გავავლოთ α სიბრტყე. α სიბრტყეში A წერტილზე გავავლოთ a წრფის პარალელური a_1 წრფე. დავამტკიცოთ, რომ a წრფის პარალელური a_1 წრფე ერთადერთია.



ნახ. 139

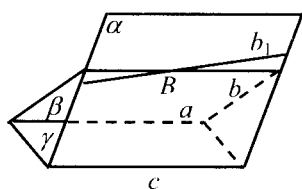
დაეუშვათ, რომ არსებობს a წრფის პარალელური სხვა რომელიმე a_2 წრფე, რომელიც A წერტილზე

გადის. a და a_2 წრფეებზე შეიძლება β სიბრტის გავლება. β სიბრტეზე გადის a წრფეზე და A წერტილზე. ამიტომ იგი α სიბრტეეს ემთხვევა (თეორემა 25.1). მივიღეთ, რომ a წრფის პარალელური a_1 და a_2 წრფეები α სიბრტეეს ეკუთვნის, პარალელურ წრფეთა აქსიომის თანახმად a_1 და a_2 წრფეები ერთმანეთს ემთხვევა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 26.2. თუ ორი წრფე ცალ-ცალკე მესამე წრფის პარალელურია, მაშინ ისინი ურთიერთპარალელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ b და c წრფეები a წრფის პარალელურია. დავამტკიცოთ, რომ $b \parallel c$.

იმ შემთხვევაში, როცა a , b და c წრფეები ერთ სიბრტეეზე მდებარეობენ, თეორემა უკვე იყო დამტკიცებული (თეორემა 4.1). ამიტომ ვივლით შემთხვევას, რომ ეს წრფეები ერთ სიბრტეეზე არ



ნახ. 140

მდებარეობენ. ვთქვათ β არის სიბრტე, რომელზედაც a და b წრფეები მდებარეობენ, ხოლო γ სიბრტე, რომელზედაც a და c წრფეები მდებარეობენ (ნახ. 140). β და γ სიბრტეები სხვადასხვაა. b წრფის რაიმე B წერტილზე და c წრფეზე გავავლოთ α სიბრტე. იგი β სიბრტეეს b_1 წრფეზე

გადაკვეთს. b_1 წრფე γ სიბრტეეს არ კვეთს. მართლაც, გადაკვეთის წერტილი a წრფეს უნდა ეკუთვნოდეს, რადგან b_1 წრფე β სიბრტეეზე მდებარეობს. ამასთან იგი c წრფესაც უნდა ეკუთვნოდეს, რადგან b_1 წრფე α სიბრტეეზე მდებარეობს. მაგრამ a და c ურთიერთპარალელური წრფეები ერთმანეთს არ კვეთენ.

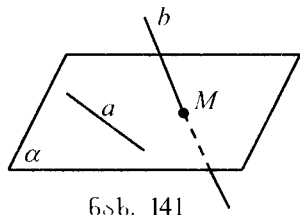
რადგან b_1 წრფე β სიბრტეეზე მდებარეობს და a წრფეს არ კვეთს, ამიტომ იგი a წრფის პარალელურია და მაშასადამე, პარალელურ წრფეთა აქსიომის თანახმად b -ს ემთხვევა. ამრიგად b წრფე, c წრფესთან ერთად ერთ სიბრტეეზე მდებარეობს და მას არ კვეთს. ე. ი. $b \parallel c$. თეორემა დამტკიცებულია.

განსაზღვრება. ორ წრფეს აცდენილი ეწოდება, თუ ისინი ერთ სიბრტეეზე არ მდებარეობენ.

ცხადია, რომ აცდენილი წრფეები არც პარალელური არიან და არც თანაიკვეთებიან. მართლაც, წინააღმდეგ შემთხვევაში მათზე შესაძლებელი იქნებოდა სიბრტეის გავლება, რაც აცდენილ წრფეთა განსაზღვრებას ეწინააღმდეგება.

თეორემა 26.3. თუ ორი წრფიდან ერთ-ერთი სიბრტყეს ეკუთვნის, მეორე კი კვეთს ამ სიბრტყეს პირველ წრფეზე არამდებარე წერტილში, მაშინ ეს წრფეები აცდენილია.

დამტკიცება. ვთქვათ a წრფე α სიბრტყეს ეკუთვნის, ხოლო b წრფე კვეთს ამ სიბრტყეს a -ზე არამდებარე M წერტილში



ნახ. 141

(ნახ. 141). დავამტკიცოთ, რომ a და b წრფეები აცდენილია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე. ი. a და b წრფეები არ არიან აცდენილი, რაც იმას ნიშნავს, რომ ისინი რაიმე β სიბრტყეს ეკუთვნიან. რადგან a წრფესა და M წერტილზე შეიძლება ერთადერთი სიბრტყის გავლება, ამიტომ β სიბრტყე

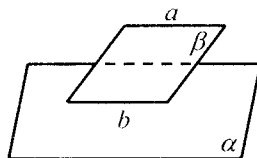
a -ს ემთხვევა. მივიღეთ, რომ b წრფე α სიბრტყეს ეკუთვნის, რაც შეუძლებელია, რადგან b წრფეს α სიბრტყესთან აქვს ერთადერთი საერთო M წერტილი. მაშასადამე, a და b წრფეები აცდენილია. თეორემა დამტკიცებულია.

II. წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა

განსაზღვრება. წრფესა და სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი არ იკვეთებიან.

თეორემა 26.4. თუ წრფე, რომელიც სიბრტყეს არ ეკუთვნის, ამ სიბრტყეზე მდებარე რომელიმე წრფის პარალელურია, მაშინ ის თვით სიბრტყის პარალელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, a არის წრფე, რომელიც α სიბრტყეს არ ეკუთვნის, ხოლო b — წრფე, რომელიც α სიბრტყეს ეკუთვნის და a წრფის პარალელურია. a და b წრფეებზე გავავლოთ β სიბრტყე (ნახ. 142). იგი განსხვავდება α სიბრტყისაგან, რადგან a წრფე α სიბრტყეს არ ეკუთვნის. α და β სიბრტყეები ერთმანეთს b წრფეზე კვეთს. a წრფე, რომ α სიბრტყეს კვეთდეს, მაშინ გადაკვეთის წერტილი b წრფეზე იქნებოდა მათავსებული, მაგრამ ეს შეუძლებელია, რადგან $a \parallel b$. ამრიგად, a წრფე α სიბრტყეს არ კვეთს, მაშასადამე, იგი α სიბრტყის პარალელურია. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 142

თეორემა 26.5 (თეორემა 26.4-ის შეგრუნებული). თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის პარალელურ წრფეზე და კვეთს ამ სიბრტყეს, მაშინ გადაკვეთის წრფე მოცემული წრფის პარალელურია.

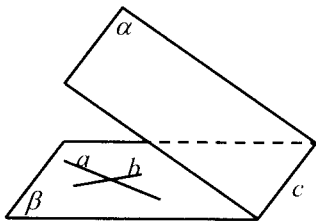
დამტკიცება.* ვთქვათ, β სიბრტყე გადის α სიბრტყის პარალელურ a წრფეზე და კვეთს α სიბრტყეს b წრფეზე (ნახ. 142). a და b წრფეები ერთხადაიმავე β სიბრტყეს ეკუთვნიან. ამასთან a წრფე b წრფეს არ გადაკვეთს, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში a წრფე გადაკვეთდა α სიბრტყეს, რაც მოცემულობას ეწინააღმდეგება. ე. ი. $a \parallel b$. თეორემა დამტკიცებულია.

III. სიბრტყეთა პარალელურობა

განსაზღვრება. ორ სიბრტყეს პარალელური ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს არ კვეთს.

თეორემა 26.6. ორი სიბრტყე პარალელურია, თუ ერთი მათგანი მეორე სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადაკვეთი წრფის პარალელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ α და β მოცემული სიბრტყეებია, ხოლო a



ნახ. 143

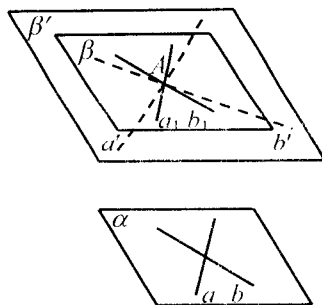
და $b - \beta$ სიბრტყეში მდებარე ორი ურთიერთგადაკვეთი წრფე, რომლებიც α სიბრტყის პარალელურია (ნახ. 143). α და β სიბრტყეები სხვადასხვაა. დავეუშვათ, რომ ისინი ერთმანეთს რაიმე c წრფეზე კვეთენ. a და b წრფეები α სიბრტყეს არ კვეთს, მაშასადამე, ისინი ამ სიბრტყეებზე მდებარე c წრფესაც არ გადა-

კვეთენ. მივიღეთ, რომ ურთიერთგადაკვეთი a და b წრფეები ერთხადაიმავე c წრფის პარალელურია, რაც პარალელურ წრფეთა აქსიომას ეწინააღმდეგება. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 26.7. სიბრტყის გარეთ მდებარე წერტილზე შეიძლება მოცემული სიბრტყის პარალელური სიბრტყის გავლება და მასთან მხოლოდ ერთი.

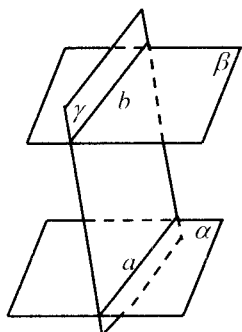
დამტკიცება. მოცემულ α სიბრტყეში გავავლოთ ორი ურთიერთგადაკვეთი a და b წრფე (ნახ. 144). მოცემულ A წერტილზე გავავლოთ a და b წრფეების პარალელური a_1 და b_1 წრფეები. a_1 და b_1 წრფეებზე გაშვებული β სიბრტყე α სიბრტყის პარალელურია (თეორემა 26.6).

დავეშვათ, რომ A წერტილზე გადის α სიბრტყის პარალელური მხარე β' სიბრტყე. ერთიერთპარალელურ a და a_1 წრფეებზე გამავალი სიბრტყე β' სიბრტყეს კვეთს a' წრფეზე. a' წრფე a წრფეს არ კვეთს, რადგან იგი არ კვეთს a წრფის შემცველ α სიბრტყეს. ამიტომ a' წრფე a წრფის პარალელურია, და მაშასადამე, პარალელურ წრფეთა აქსიომის თანახმად იგი a_1 წრფეს ემთხვევა. ანალოგიურად ვანხვებთ, რომ b' წრფე ემთხვევა b_1 წრფეს. რადგან VI_3 აქსიომის თანახმად a_1 და b_1 წრფეებზე შეიძლება მხოლოდ ერთი სიბრტყის გადღება, ამიტომ β' სიბრტყე β სიბრტყეს ემთხვევა. მივიღეთ წინააღმდეგობა. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 144

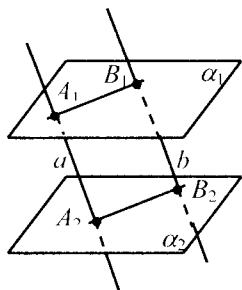
თეორემა 26.8. თუ ორი პარალელური სიბრტყე გადაკვეთილია მესამე სიბრტყით, მაშინ გადაკვეთის წრფეები პარალელურია.



ნახ. 145

დამტკიცება. ვთქვათ, γ სიბრტყე α და β პარალელური სიბრტყეებს კვეთს შესაბამისად a და b წრფეებზე (ნახ. 145). დავამტკიცოთ, რომ $a \parallel b$. ეს წრფეები ერთხელაშიავე γ სიბრტყეზე მდებარეობენ. ამასთან ისინი ერთმანეთს არ კვეთენ, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში გადაკვეთილდნენ α და β სიბრტყეებიც, რაც მოცემულობას ეწინააღმდეგება. ე. ი. $a \parallel b$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 26.9. ორ პარალელურ სიბრტყეს შორის მოთავსებული, ამ სიბრტყეთა გადაკვეთი პარალელური წრფეების მონაკვეთები ტოლია.



ნახ. 146

დამტკიცება. ვთქვათ α_1 და α_2 პარალელური სიბრტყეებია, a და b – ამ სიბრტყეების გადაკვეთი პარალელური წრფეები. A_1, A_2 და B_1, B_2 – სიბრტყეებთან წრფეების გადაკვეთის წერტილებია (ნახ. 146). a და b წრფეებზე გავავლოთ *სიბრტყე. იგი α_1 და α_2 სიბრტყეებს კვეთს A_1B_1 და A_2B_2 პარალელურ წრფეებზე. $A_1B_1B_2A_2$ ოთხკუთ-

ხედი პარალელოგრამია, რადგან მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია. პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდები ტოლია. მაშასადამე $A_1A_2=B_1B_2$. თეორემა დამტკიცებულია.

§27. წრფეებისა და სიბრტყეების მართობულობა

I. წრფეთა მართობულობა

განსაზღვრება. ორ წრფეს ურთიერთმართობული ეწოდება, თუ ისინი ერთმანეთს მართი კუთხით კვეთენ.

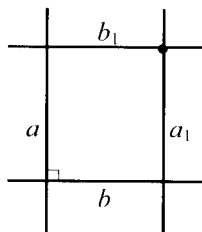
თეორემა 27.1. ურთიერთმართობული წრფეების პარალელური ურთიერთგადაკვეთი წრფეები ურთიერთმართობულია.

დამტკიცება. ვთქვათ a და b ურთიერთმართობული წრფეებია, a_1 და b_1 კი — a და b წრფეების პარალელური ურთიერთგადაკვეთი წრფეები. დავამტკიცოთ, რომ $a_1 \perp b_1$.

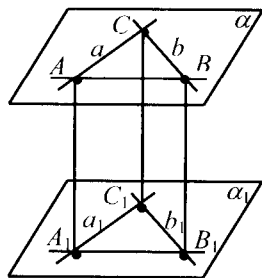
ჯერ დაუშვათ, რომ a , b , a_1 და b_1 წრფეები ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ (ნახ. 147). რადგან $b \parallel b_1$ და $a \perp b$, ამიტომ $a \perp b_1$. რადგან $a \parallel a_1$ და $b_1 \perp a$, ამიტომ $a_1 \perp b_1$.

ახლა დაუშვათ, რომ a და b წრფეები რომელიმე α სიბრტყეში მდებარეობენ, ხოლო a_1 და b_1 წრფეები — რომელიმე α_1 სიბრტყეში (ნახ. 148). a და b წრფეები α_1 სიბრტყის პარალელურია (თეორემა 26.4), მაშინ α და α_1 სიბრტყეები ურთიერთპარალელურია (თეორემა 26.6). ვთქვათ, C არის a და b წრფეების ურთიერთგადაკვეთის წერტილი, C_1 კი — a_1 და b_1 წრფეების ურთიერთგადაკვეთის წერტილი. პარალელური a და a_1 წრფეების სიბრტყეში გაავლოთ CC_1 წრფის პარალელური წრფე. იგი a და a_1 წრფეებს გადაკვეთს A და A_1 წერტილებში. ანალოგიურად, b და b_1 პარალელური წრფეების სიბრტყეშიც გაავლოთ CC_1 წრფის პარალელური წრფე, რომელიც b და b_1 წრფეებს გადაკვეთს B და B_1 წერტილებში.

CAA_1C_1 და CBB_1C_1 ოთხკუთხედები პარალელოგრამებია, რადგან მათი მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია. ABB_1A_1 ოთხკუთხედი აგრეთვე პარალელოგრამია, რადგან $AA_1 \parallel BB_1$,



ნახ. 147



ნახ. 148

როგორც ერთიდაიმავე CC_1 წრფის პარალელური მონაკვეთები და $AA_1=BB_1$, როგორც პარალელურ სიბრტყეებს შორის მოთავსებული პარალელური წრფეების მონაკვეთები.

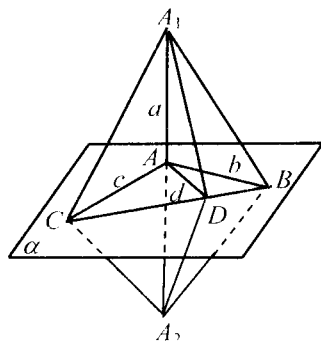
$\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად, რადგან $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$, როგორც პარალელოგრამების მოპირდაპირე გვერდები. მაშასადამე, $\angle A_1C_1B_1=\angle ACB=90^\circ$, ე. ი. $a_1\perp b_1$. თეორემა დამტკიცებულია.

II. წრფისა და სიბრტყის მართობულობა

განსაზღვრება. სიბრტყის გადამკვეთ წრფეს ამ სიბრტყისადმი მართობული ეწოდება, თუ იგი გადაკვეთის წერტილზე გამავალი და მოცემულ სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის მართობულია.

თეორემა 27.2. თუ სიბრტყის გადამკვეთი წრფე ამ სიბრტყეში მდებარე და გადაკვეთის წერტილზე გამავალი ორი წრფის მართობულია, მაშინ იგი სიბრტყის მართობულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, a არის წრფე, რომელიც α სიბრტყეს A წერტილში კვეთს და ამ სიბრტყეზე მდებარე b და c წრფეების მართობულია (ნახ. 149). დავამტკიცოთ რომ a წრფე α სიბრტყის მართობულია.



ნახ. 149

α სიბრტყეში A წერტილზე გავავლოთ b და c წრფეებისაგან განსხვავებული ნებისმიერი d წრფე და ვანვიხიოთ, რომ იგი a წრფის მართობულია. α სიბრტყეში გავავლოთ ნებისმიერი ისეთი წრფე, რომელიც A წერტილზე არ გაივლის და b , c და d წრფეებს გადაკვეთს. ვთქვათ გადაკვეთის წერტილებია B , C და D .

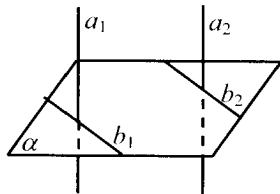
a წრფეზე A წერტილიდან სხვადასხვა მიმართულებით ავაგოთ AA_1 და AA_2 ტოლი მონაკვეთები. $CA_1=CA_2$, რადგან CA წარმოადგენს A_1A_2 მონაკ-

ვეთის შუამართობს. ანალოგიურად, $BA_1=BA_2$. მაშასადამე, $\triangle A_1BC=\triangle A_2BC$ სამკუთხედების ტოლობის მესამე ნიშნის თანახმად. ამ სამკუთხედების ტოლობიდან გამომდინარეობს A_1BD და A_2BD კუთხეების ტოლობა და მაშასადამე, სამკუთხედების

ტოლობის პირველი ნიშნის თანახმად $\Delta A_1BD = \Delta A_2BD$. ამ სამკუთხედების A_1D და A_2D გვერდების ტოლობიდან დავასკვნით, რომ ΔA_1DA_2 ტოლფერდაა. ამიტომ მისი AD მედიანა სიმაღლეცაა. ე. ი. $d \perp a$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 27.3. თუ სიბრტყე ორი ურთიერთპარალელური წრფიდან ერთ-ერთის მართობულია, მაშინ იგი მეორე წრფის მართობულიც იქნება.

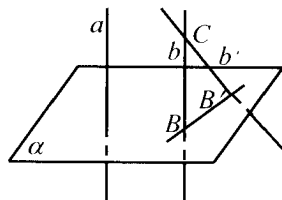
დამტკიცება. ვთქვათ a_1 და a_2 არის ორი ურთიერთპარალელური წრფე, α – სიბრტყე, რომელიც a_1 წრფის მართობულია (ნახ. 150). დავამტკიცოთ, რომ ეს სიბრტყე a_2 წრფის მართობულიცაა. α სიბრტყეში a_2 წრფისა და α სიბრტყის გადაკვეთის წერტილზე გავავლოთ ნებისმიერი b_2 წრფე. α სიბრტყისა და a_1 წრფის გადაკვეთის წერტილზე გავავლოთ b_1 წრფე. ეს წრფე α სიბრტყეში ძევს. რადგან a_1 წრფე α – სიბრტყის მართობულია, ამიტომ a_1 და b_1 წრფეები ურთიერთმართობულია. 27.1 თეორემის თანახმად კი ამ წრფეების პარალელური ურთიერთგადამკვეთი a_2 და b_2 წრფეებიც აგრეთვე ურთიერთმართობულია. ამრიგად, a_2 წრფე α სიბრტყეში ნებისმიერი b_2 წრფის მართობულია. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ a_2 წრფე α სიბრტყის მართობულია. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 150

თეორემა 27.4. თუ ორი წრფე ერთიდაიმავე სიბრტყის მართობულია, მაშინ ისინი პარალელურია.

დამტკიცება. ვთქვათ, a და b არის α სიბრტყის მართობული წრფეები (ნახ. 151). დავუშვათ, რომ a და b ერთმანეთის პარალელური არ არის. b წრფის რომელიმე C წერტილზე გავავლოთ a წრფის პარალელური b' წრფე. b' წრფე α სიბრტყის მართობულია (თეორემა 27.3). ვთქვათ, B და B' არის α სიბრტყესთან b და b' წრფეების გადაკვეთის წერტილები. მაშინ BB' წრფე ურთიერთგადამკვეთი b და b' წრფეების მართობულია. ეს კი შეუძლებელია. მივედით წინააღმდეგობამდე. თეორემა დამტკიცებულია.

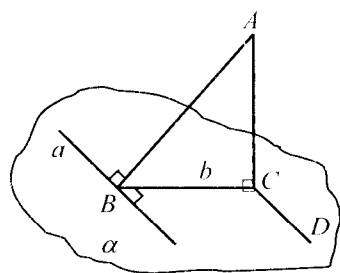


ნახ. 151

III. სამი მართობის თეორემა

მოცემული წერტილიდან მოცემულ სიბრტყეზე დაშვებული მართობი ეწოდება იმ მონაკვეთს, რომელიც მოცემულ წერტილს აერთებს სიბრტყის წერტილთან და ძვეს სიბრტყის მართობულ წრფეზე მონაკვეთის იმ ბოლოს, რომელიც სიბრტყეში ძვეს მართობის ფუძე ეწოდება. წერტილიდან სიბრტყემდე მანძილი ეწოდება ამ წერტილიდან სიბრტყეზე დაშვებული მართობის სიგრძეს.

თეორემა 27.5. სიბრტყეზე არამდებარე წერტილზე შეიძლება გაივლოს ამ სიბრტყის მართობული წრფე და მასთან მხოლოდ ერთი.



ნახ. 152

დამტკიცება. ვთქვათ მოცემულია α სიბრტყე და მასზე არამდებარე A წერტილი (ნახ. 152). a იყოს α სიბრტყეში მდებარე რაიმე წრფე. A წერტილზე გავავლოთ a წრფის მართობული AB წრფე. B წერტილზე გავატაროთ α სიბრტყეში მდებარე a წრფის პერპენდიკულარული b წრფე. A წერტილიდან b წრფეზე დავუშვათ AC მართობი. დავამტკიც-

ვით, რომ AC მართობულია α სიბრტყის.

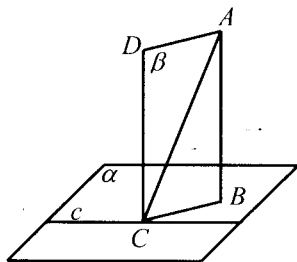
თუ AC ემთხვევა AB -ს, მაშინ $AC \perp \alpha$, რადგან ის მართობულია გადაკვეთის B წერტილზე გამავალი α სიბრტყეში მდებარე a და b წრფეების.

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა AC არ ემთხვევა AB -ს. C წერტილზე გავავლოთ a წრფის პარალელური CD წრფე და ვასვენოთ, რომ $\angle ACD$ მართია. ვინაიდან $a \perp AB$ და $a \perp CB$, ამიტომ a წრფე ABC სამკუთხედის სიბრტყის მართობულია. ამავე სიბრტყის მართობულია a წრფის პარალელური CD წრფე, ე. ი. $\angle ACD = 90^\circ$. გამოძვინარე აქედან $AC \perp \alpha$, რადგან ის მართობულია გადაკვეთის C წერტილზე გამავალი CB და CD წრფეების. ერთადერთობის მართებულობა ცხადია. თეორემა დამტკიცებულია.

მოცემული წერტილიდან მოცემული სიბრტყისადმი გავლგებული დახრილი ეწოდება ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც სიბრტყისადმი მართობს არ წარმოადგენს და რომლის ერთი ბოლო მოცემულ წერტილშია, ხოლო მეორე – სიბრტყეზე.

მონაკვეთის იმ ბოლოს, რომელიც სიბრტყეში ძეგს, დახრილის ფუძე ეწოდება. ერთიდაიმავე წერტილიდან გაკლებული მართობისა და დახრილის ფუძეების შემკერებელ მონაკვეთს, დახრილის გუბმილი ეწოდება.

თეორემა 27.6 (სამი მართობის თეორემა). თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის ფუძეზე გადის და ამ დახრილის გუბმილის მართობულია, მაშინ იგი დახრილის მართობულიც არის. პირიქით თუ სიბრტყეზე მდებარე წრფე დახრილის მართობულია, მაშინ ის დახრილის გუბმილის მართობულიც არის.



ნახ. 153

დამტკიცება. ვთქვათ, AB არის α სიბრტყისადმი გაკლებული მართობი, AC — დახრილი, ხოლო c კი α სიბრტყეში მდებარე წრფეა, რომელიც დახრილის C ფუძეზე გადის და CB -ს მართობულია (ნახ. 153). გაკავლოთ α სიბრტყის მართობი CD წრფე. იგი AB წრფის პარალელურია (თეორემა 27.4). AB და AC -ზე გაკავლოთ β სიბრტყე. $c \perp CD$ აგების თანახმად, ხოლო $c \perp CB$ მოცემულობის თანახმად. ამიტომ c წრფე β სიბრტყის, მაშასადამე AC წრფის მართობულიცაა.

ანალოგიურად, თუ c წრფე CA დახრილის მართობულია, მაშინ, რადგან c წრფე CD წრფის მართობულია, იგი β სიბრტყის მართობულიცაა. მაშასადამე c წრფე დახრილის BC გუბმილის მართობულია.

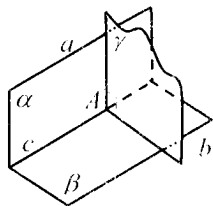
თეორემა დამტკიცებულია.

IV. სიბრტყეთა მართობულობა

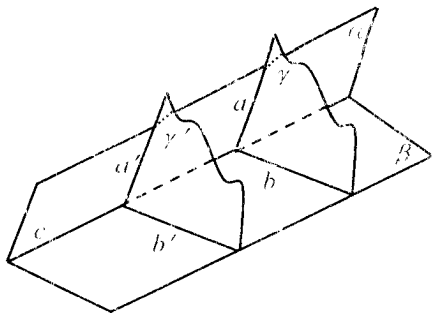
განსაზღვრება. ორ ურთიერთგადაკვეთ სიბრტყეს ურთიერთმართობული ეწოდება, თუ მესამე სიბრტყე, რომელიც სიბრტყეთა გადაკვეთის წრფის მართობულია, ამ სიბრტყეებს კვეთს ურთიერთმართობულ წრფეებზე (ნახ. 154).

სიბრტყეთა მართობულობის განსაზღვრება არ არის დამოკიდებული γ სიბრტყის შერჩევაზე: მართლაც, თუ ავიღებთ სხვა რომელიმე γ' სიბრტყეს, რომელიც c წრფის მართობულია, მაშინ იგი α და β სიბრტყეებს გადაკვეთს a' და b' წრფეებზე, რომლებიც შესაბამისად a და b წრფეების პარალელურია. (ნახ. 155).

ამიტომ a და b წრფეების მართობულობიდან გამომდინარეობს a' და b' წრფეების მართობულობა (თეორემა 27.1).



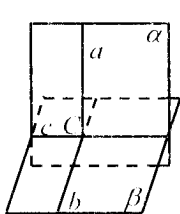
ნახ. 154



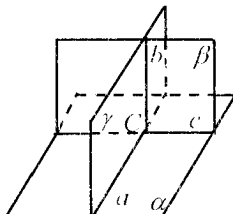
ნახ. 155

თეორემა 27.7. თუ სიბრტყე გადის მეორე სიბრტყის მართობულ წრფეზე, მაშინ ეს სიბრტყეები ურთიერთმართობულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, β სიბრტყე გადის α სიბრტყის მართობულ b წრფეზე, ხოლო c კი α და β სიბრტყეების გადაკვეთის წრფეა (ნახ. 156). დავამტკიცოთ, რომ $\alpha \perp \beta$. b წრფისა და α სიბრტყის



ნახ. 156



ნახ. 157

გადაკვეთის წერტილზე α სიბრტყეში გაგავლით c წრფეს მართობული a წრფე. a და b წრფეებზე გაგვლებული γ სიბრტყე c წრფის მართობულია, რადგან c წრფე a და b წრფეების მართობულია. ვინაიდან $a \perp b$ ამიტომ $\alpha \perp \beta$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 27.8. თუ ორი ურთიერთმართობული სიბრტყიდან ერთ-ერთში გაგავლებთ მათი გადაკვეთის წრფის მართობულ წრფეს, მაშინ ეს წრფე მეორე სიბრტყის მართობულიც იქნება.

დამტკიცება. ვთქვათ, α და β მოცემული ურთიერთმართობული სიბრტყეებია, რომელთა გადაკვეთის წრფეა c . a არის α სიბრტყეში მდებარე წრფე, რომელიც c წრფის მართობულია (ნახ. 157). დავამტკიცოთ, რომ a წრფე β სიბრტყის მართობულია. a და c წრფეების გადაკვეთის C წერტილზე β სიბრტყეში,

გაგავლობს c წრფის მართობული b წრფე. a და b წრფეებზე გამავალი γ სიბრტყე c წრფის მართობულია, რადგან მასში მდებარე a და b წრფეები c წრფის მართობულია. რადგან α და β სიბრტყე ურთიერთმართობულია, ამიტომ a და b წრფეებიც ურთიერთმართობულია. მივიღეთ, რომ a წრფე მართობულია β სიბრტყეში მდებარე b და c წრფეების. ამიტომ $a \perp \beta$. თეორემა დამტკიცებულია.

V. მანძილი აცდენილ წრფეებს შორის

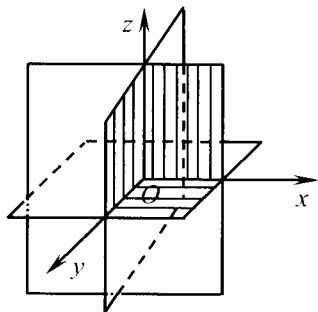
ორი აცდენილი წრფის საერთო მართობი ეწოდება მონაკვეთს, რომლის ბოლოები ამ წრფეებზეა და თითოეული მათგანის მართობულია.

მტკიცდება, რომ ორ აცდენილ წრფეს აქვს საერთო მართობი და მასთან მხოლოდ ერთი. იგი ამ წრფეებზე გამავალი პარალელური სიბრტყეების საერთო მართობია.

აცდენილ წრფეებს შორის მანძილი ეწოდება მათი საერთო მართობის სიგრძეს. იგი ამ წრფეებზე გამავალ პარალელურ სიბრტყეებს შორის მანძილის ტოლია.

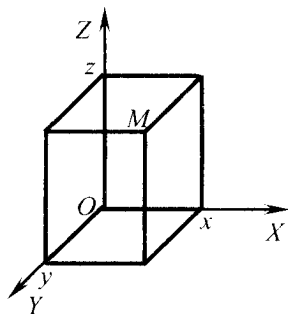
§28. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში

განვიხილოთ სივრცეში ერთიდიამვე მასშტაბის მქონე სამი ურთიერთმართობული Ox , Oy და Oz საკოორდინატო ღერძი (ნახ. 158). Ox ღერძს ეწოდება აბსცისთა ღერძი, Oy ღერძს — ორდინატთა ღერძი, ხოლო Oz ღერძს — აპლიკატთა ღერძი. წვეილ-წვეილად აღებული საკოორდინატო ღერძები განსაზღვრვენ ე. წ. საკოორდინატო xOy , yOz და zOx სიბრტყეებს. საკოორდინატო ღერძების გადაკვეთის O წერტილს კოორდინატთა სათავე ეწოდება. საკოორდინატო ღერძების ასეთ სისტემას ეწოდება დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში.



ნახ. 158

სივრცეში აღებულ ნებისმიერ M წერტილზე გავავლოთ საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები, რომლებიც საკოორდინატო Ox , Oy და Oz დერძებს გადაკვეთენ წერტილებში, რომელთა კოორდინატებია შესაბამისად, x , y და z (ნახ. 159). ამრიგად სივრცის ნებისმიერ M წერტილს შეესაბამება ნამდვილ რიცხვთა გარკვეული დალაგებული (x, y, z) სამეული. x -ს ეწოდება M წერტილის აბსცისა, y -ს — ორდინატი, ხოლო z -ს აპლიკატი. x , y და z რიცხვებს ეწოდება M წერტილის კოორდინატები და წერენ $M(x, y, z)$.



ნახ. 159

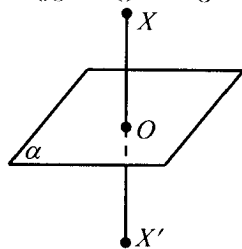
ეთქვით ახლა მოცემულია ნამდვილ რიცხვთა (x, y, z) სამეული. აბსცისთა დერძის x წერტილზე, ორდინატთა დერძის y წერტილზე და აპლიკატთა დერძის z წერტილზე გავავლოთ შესაბამისად Ox , Oy და Oz დერძების მართობული სიბრტყეები. ცხადია, რომ ეს სიბრტყეები ერთ წერტილში გადაიკვეთებიან და მოცემული (x, y, z) სამეული შეესაბამება მათი გადაკვეთის M წერტილს. ამ წესით ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერ (x, y, z) დალაგებულ სამეულს შეესაბამება სივრცის გარკვეული წერტილი, რომლის კოორდინატებია x , y და z .

ამრიგად, სივრცის წერტილებსა და ნამდვილ რიცხვთა დალაგებული სამეულების სიმრავლეს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

§29. ფიგურათა გარდაქმნა სივრცეში

სივრცეში* ფიგურათა გარდაქმნა ისევე განისაზღვრება, როგორც სიბრტყეზე (§13). სივრცეში წერტილის მიმართ სიმეტრია, წრფის მიმართ სიმეტრია და კომოთეცია აგრეთვე ისევე განისაზღვრება, როგორც სიბრტყეზე.

გარდა წერტილის მიმართ სიმეტრიისა და წრფის მიმართ სიმეტრიისა, განიხილება სიბრტყის მიმართ სიმეტრიაც. ამ გარდაქმნის აზრი ასეთია: ვთქვათ α ნებისმიერი ფიქსირებული სიბრტყეა (ნახ. 160). ფიგურის X წერტილიდან α სიბრტყეზე ვუშევებთ XO მართობს და მის გაგრძელებაზე O წერტილის მხარეს ვაგებთ XO -ს ტოლ OX' მონაკვეთს. გარდაქმნას, რომელსაც X წერტილი გადაჰყავს მის სიმეტრიულ X' წერტილში, უწოდებენ α სიბრტყის მიმართ სიმეტრიულ გარდაქმნას. თუ სიბრტყის მიმართ სიმეტრიულ გარდაქმნას ფიგურა თავის თავში გადაჰყავს, მაშინ ფიგურას უწოდებენ სიმეტრიულს α სიბრტყის მიმართ, ხოლო α სიბრტყეს – სიმეტრიის სიბრტყეს.



ნახ. 160

სივრცეში მოძრაობა ისევე განისაზღვრება, როგორც სიბრტყეზე სახელობრ, მოძრაობა ეწოდება გარდაქმნას, რომელიც წერტილებს შორის მანძილებს არ ცვლის. სივრცეში წერტილის, წრფისა და სიბრტყის მიმართ სიმეტრიული გარდაქმნები მოძრაობებია. შევნიშნოთ, რომ ისევე როგორც სიბრტყეზე, მოძრაობას წრფე გადაჰყავს წრფეში, სხივი – სხივში, მონაკვეთი – მონაკვეთში და კუთხე მის ტოლ კუთხეში. სივრცეში მოძრაობის ახალი თვისება ის არის, რომ მოძრაობას სიბრტყე გადაჰყავს სიბრტყეში.

პარალელური გადატანა. პარალელური გადატანა ეწოდება ისეთ გარდაქმნას, რომელსაც ფიგურის ნებისმიერი (x, y, z) წერტილი გადაჰყავს $(x+a, y+b, z+c)$ წერტილში, სადაც a, b, c – მუდმივებია, ამრიგად პარალელური გადატანა მოიცემა შემდეგი ფორმულებით:

$$x'=x+a, \quad y'=y+b, \quad z'=z+c,$$

სადაც x', y' და z' წარმოადგენენ იმ წერტილის კოორდინატებს, რომელშიაც პარალელურ გადატანისას გადაადის (x, y, z) წერტილი. გამომდინარე აქედან, პარალელური გადატანა არის გარდაქმნა, რომლითაც სივრცის ნებისმიერი წერტილი ერთსა და იმავე მიმართულებით გადაადგილდება.

თუ პარალელური გადატანა სრულდება სიბრტყეზე, მაშინ ფიგურის ნებისმიერი (x, y) წერტილი გადადის ისეთ (x', y') წერტილში, რომ

$$x' = x + a, \quad y' = y + b,$$

სადაც a და b რაიმე მუდმივებია.

პარალელურ გადატანას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. პარალელური გადატანა მოძრაობაა.
 2. პარალელური გადატანისას წერტილები გადაადგილდება პარალელური (ან თანსწვლენილი) წრფეების ვახვრივ ერთი და იმავე მანძილზე.
 3. პარალელური გადატანისას თითოეული წრფე გადადის თავისივე პარალელურ წრფეში (ან თავის თავში).
 4. ნებისმიერი ორი A და A' წერტილისათვის არსებობს მხოლოდ ერთი პარალელური გადატანა, რომელსაც A წერტილი A' წერტილში გადაჰყავს.
 5. ორი თანამიმდევრობით შესრულებული პარალელური გადატანა გეგმდევს პარალელურ გადატანას.
 6. პარალელური გადატანის შებრუნებული გარდაქმნა არის პარალელური გადატანა.
 7. სივრცეში პარალელურ გადატანას ყოველი სიბრტყე გადაჰყავს ან თავის თავში, ან თავის პარალელურ სიბრტყეში.
- სივრცეში კომპოზიცია და მსგავსების გარდაქმნა ისევე განისაზღვრება როგორც სიბრტყეზე. ისევე, როგორც სიბრტყეზე, მტკიცდება, რომ სივრცეში კომპოზიცია არის მსგავსების გარდაქმნა.

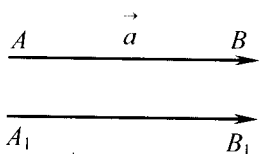
§30. ვექტორები

ფიზიკის, მექანიკისა და სხვადასხვა ტექნიკური მეცნიერებების შესწავლისას გვხვდება სხვადასხვა სახის სიდიდეები. ზოგი მათგანი სავსებით განისაზღვრება მისი რიცხვითი მნიშვნელობით. ასეთ სიდიდეებს სკალარული სიდიდეები ეწოდება. სკალარული სიდიდეების მაგალითებია სიგრძე, ფართობი, მოცულობა, ტემპერატურა, კუთხის ზომა, ადამიანის ასაკი და სხვა. არსებობს სხვა სახის სიდიდეებიც, რომელთა განსაზღვრისათვის, გარდა რიცხვითი მნიშვნელობისა, საჭიროა აგრეთვე მათი მიმართულების ცოდნა. ასეთ სიდიდეებს ვექტორული სიდიდეები ან ვექტორები ეწოდება. ვექტორული სიდიდეებია, მაგალითად ძალა, სიჩქარე, აჩქარება, მაგნიტური ველის დამაბუფლობა და სხვ. სხვადასხვა სახის ვექტორული

სიდიდეების ზოგადად შესწავლისათვის (მათი კონკრეტული თვისებების გაუთვალისწინებლად) საჭიროა შემოვიდეთ ე. წ. ვექტორის ცნება.

განსაზღვრება. ვექტორი ეწოდება მიმართულ მონაკვეთს, ე. ი. მონაკვეთს, რომლისთვისაც დასახელებულია სათავე და ბოლო წერტილი.

ვექტორი, რომლის სათავეა A , ხოლო ბოლო წერტილია B , აღინიშნება სიმბოლოთი $\vec{AB}$. ზოგჯერ ვექტორი აღინიშნება აგრეთვე ერთი ასოთი, მაგალითად, $\vec{a}$. ნახაზზე ვექტორი გამოისახება ისრით (ნახ. 161).



ნახ. 161

ვექტორის სათავეს მისი მოდების წერტილი ეწოდება.

ვექტორს, რომლის სათავე და ბოლო წერტილი ერთმანეთს ემთხვევა, ნულოვანი ვექტორი ანუ ნულ-ვექტორი ეწოდება. ის

აღინიშნება $\vec{0}$ სიმბოლოთი. ნულ-ვექტორს გარეგეული მიმართულება არ გააჩნია.

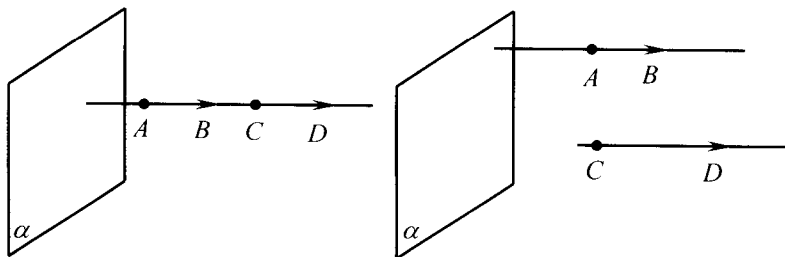
განსაზღვრება. ვექტორის სიგრძე (მოდული) ეწოდება მანძილს მის სათავესა და ბოლო წერტილს შორის.

$\vec{AB}$ ვექტორის სიგრძე აღინიშნება $|\vec{AB}|$ სიმბოლოთი. ცხადია, ნულ-ვექტორის სიგრძე უდრის ნულს.

განსაზღვრება. ვექტორს, რომლის სიგრძე 1-ის ტოლია, ერთეულოვანი ვექტორი ან ორტი ეწოდება.

განსაზღვრება. ერთი და იგივე წრფის პარალელურ ვექტორებს კოლინეარული ვექტორები ეწოდება, ხოლო ერთი და იგივე სიბრტყის პარალელურ ვექტორებს – კოპლანარული.

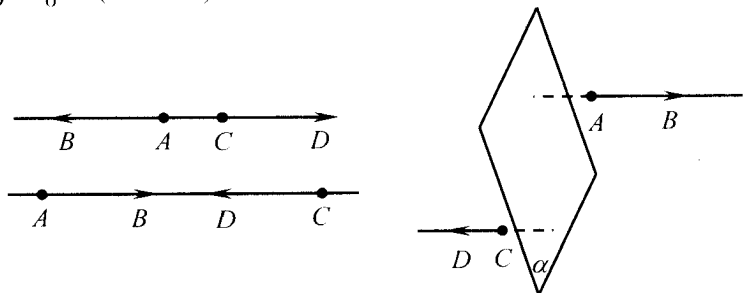
მიღებულია, რომ ნულოვანი ვექტორი ნებისმიერი ვექტორის კოლინეარულია, ხოლო თუ სამი ვექტორიდან ერთი მაინც ნულოვანია, მაშინ ისინი კოპლანარულია.



ნახ. 162

$\vec{AB}$ და $\vec{CD}$ კოლინეარულ ვექტორებს თანამიმართული (ერთნაირად მიმართული) ეწოდება, თუ არსებობს AB წრფის არაპარალელური α სიბრტყე ისეთი, რომ AB და CD სხივები მდებარეობს α სიბრტყის (ვალ მხარეს (ნახ. 162).

$\vec{AB}$ და $\vec{CD}$ კოლინეარულ ვექტორებს საწინააღმდეგოდ მიმართული ეწოდება, თუ ისინი არ არიან თანამიმართული ვექტორები (ნახ. 163).



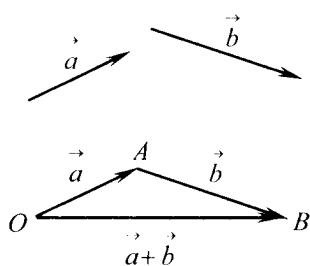
ნახ. 163

განსაზღვრება. ორ ვექტორს ეწოდება ტოლი, თუ ისინი თანამიმართულია და მათი სიგრძეები ტოლია.

პარალელური გადატანის თვისებებიდან გამომდინარეობს, რომ სივრცის ნებისმიერ წერტილზე შეიძლება მოვლათ მოცემული ვექტორის ტოლი ვექტორი, თანაც ერთადერთი.

თუ $\vec{AB}$ და $\vec{A_1B_1}$ (ნახ. 161) ვექტორები ტოლია, წერენ $\vec{AB} = \vec{A_1B_1}$.

I. წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე



ნახ. 164

ვექტორებზე წრფივი ოპერაციები ეწოდება ვექტორთა შეკრებას და ვექტორის რიცხვზე გამრავლებას.

ვთქვათ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ნებისმიერი ორი ვექტორია. ავიღოთ სივრცის ნებისმიერი O წერტილი და ავაჭათ $\vec{OA} = \vec{a}$ ვექტორი, შემდეგ კი $\vec{AB} = \vec{b}$ ვექტორი.

$\vec{OB}$ ვექტორს (ნახ. 164) ეწოდება $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი და აღინიშნება შემდეგნაირად: $\vec{a} + \vec{b}$, ე. ი.

$$\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

ვექტორთა შეკრების ამ წესს სამკუთხედის წესი ეწოდება.

შევნიშნოთ, რომ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების ჯამი არ არის დამოკიდებული იმ წერტილის შერჩევაზე, რომელსაც მოვდებთ პირველ შესაკრებ ვექტორს.

ვექტორთა შეკრების ეს წესი შეიძლება განვაზოგადოთ შესაკრებ ვექტორთა ნებისმიერი სასრული რაოდენობისათვის.

ვთქვათ, მოცემულია $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ვექტორები. $\vec{a}_1$ ვექტორის

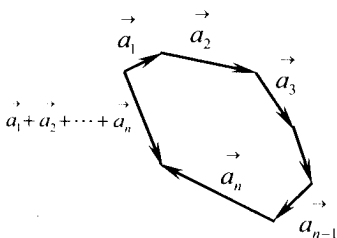
ბოლო წერტილზე მოვდით $\vec{a}_2$ ვექტორი, $\vec{a}_2$ -ის ბოლო წერტილზე -

$\vec{a}_3$ ვექტორი და ა. შ. $\vec{a}_{n-1}$ ვექტორის ბოლო წერტილზე -

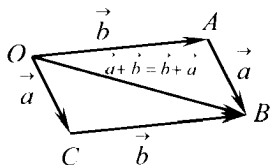
$\vec{a}_n$ ვექტორი. ვექტორს, რომლის სათავეა $\vec{a}_1$ -ის სათავე, ხოლო

ბოლო წერტილია $\vec{a}_n$ -ის ბოლო წერტილი, ეწოდება $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

ვექტორების ჯამი და ასე აღინიშნება: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n$ (ნახ. 165).



ნახ. 165

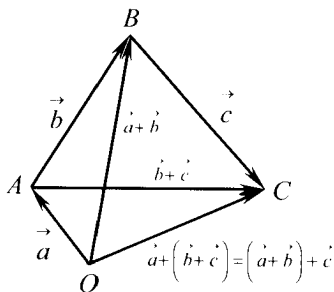


ნახ. 166

ვექტორთა შეკრების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (გადანაცვლებადობა)
2. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (ჯუჯვლებადობა).

ამ თვისებების მართებულობა ჩანს შესაბამისად 166 და 167 ნახაზებიდან.



ნახ. 167

ცხადია, ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი ეწოდება ისეთ $\vec{b}$ ვექტორს, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ ორ პირობას:

1) $|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|$, 2) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს აქვთ ერთნაირი მიმართულება, თუ $\lambda > 0$ და საწინააღმდეგო მიმართულება, თუ $\lambda < 0$.

$\vec{a}$ ვექტორის λ რიცხვზე ნამრავლი აღინიშნება $\lambda \vec{a}$ სიმბოლოთი.

თუ $\lambda = 0$ ან $\vec{a} = \vec{0}$, მაშინ მიღებულია, რომ $\lambda \vec{a} = \vec{0}$.

$\vec{a}$ ვექტორის (-1) -ზე ნამრავლს ეწოდება $\vec{a}$ ვექტორის შიპირ-დაპირუ ვექტორი და აღინიშნება $-\vec{a}$ სიმბოლოთი. ცხადია

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e},$$

სადაც $\vec{e}$ არის $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორი. მას $\vec{a}$ ვექტორის მიმართულებით ვექტორი, ანუ მგეზავი ეწოდება.

ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის განსაზღვრების თანახმად,

$\vec{b} = \lambda \vec{a}$ ვექტორი $\vec{a}$ ვექტორის კოლინეარულია. პირიქით, თუ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ არანულოვანი კოლინეარული ვექტორებია, მაშინ $\vec{b} = \lambda \vec{a}$,

სადაც $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, თუ ამ ვექტორებს ერთნაირი მიმართულება აქვთ.

და $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, თუ მათ საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ.

ამრიგად, ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 30.1. იმისათვის, რომ ორი ვექტორი იყოს კოლინეარული, აუცილებელია და საკმარისი, რომ ერთ-ერთი მათგანი წარმოადგენდეს მეორის ნამრავლს გარკვეულ რიცხვზე.

ვექტორის რიცხვზე გამრავლების ოპერაციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

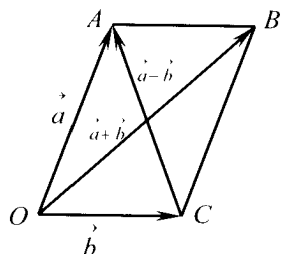
1. $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$;
2. $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$;
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა ეწოდება $\vec{a} + (-\vec{b})$ ვექტორს

და ასე აღინიშნება: $\vec{a} - \vec{b}$. ცხადია, $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სხვაობა არის ისეთი $\vec{c}$ ვექტორი, რომ $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

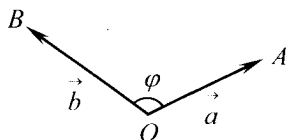
ბოლოს მოვიყვანოთ არაკოლინეარულ ვექტორთა შეკრების კიდევ ერთი წესი, ე. წ. პარალელოგრამის წესი, რომელიც გვაძლევს აგრეთვე ვექტორთა სხვაობის აგების წესს.

ვთქვათ, მოცემულია არაკოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები. ეს ვექტორები მოვდით ნებისმიერ O წერტილზე და ავაგოთ მათზე პარალელოგრამი (ნახ. 168). ნახაზიდან ჩანს, რომ $\vec{OB}$ დიაგონალი წარმოადგენს ამ ვექტორების ჯამს $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$, ხოლო $\vec{CA}$ დიაგონალი — მათ სხვაობას $\vec{CA} = \vec{a} - \vec{b}$.



ნახ. 168

II. ვექტორის გეგმილი ღერძზე. დეკარტის მართკუთხა ბაზისი



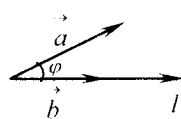
ნახ. 169

ვთქვათ, მოცემულია ორი არანულოვანი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორი. სივრცის ნებისმიერ O წერტილზე მოვდით $\vec{OA} = \vec{a}$ და $\vec{OB} = \vec{b}$ ვექტორები (ნახ. 169).

განსაზღვრება. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე ეწოდება იმ უმცირეს φ კუთხეს, რომლითაც უნდა

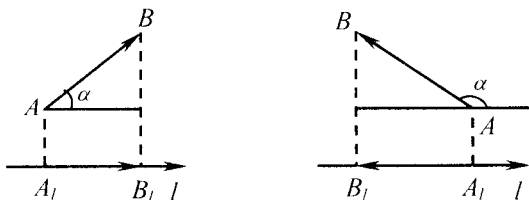
მობრუნდეს ერთ-ერთი ვექტორი, რომ მისი მიმართულება დაემთხვეს მეორე ვექტორის მიმართულებას.

განსაზღვრება. კუთხე α ვექტორსა და l ღერძს შორის ეწოდება კუთხეს α ვექტორსა და l ღერძის მიმართულების მქონე ნებისმიერ $\vec{b}$ ვექტორს შორის (ნახ. 170).



ნახ. 170

ვთქვათ, მოცემულია l ღერძი და $\vec{AB}$ ვექტორი (ნახ. 171). A და B წერტილების ორთოგონალური გეგმილები l ღერძზე შესაბამისად იყოს A_1 და B_1 .



ნახ. 171

განსაზღვრება. $\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი l ღერძზე ეწოდება $|A_1B_1|$ -ს, თუ $\vec{A_1B_1}$ ვექტორსა და l ღერძს ერთი და იგივე მიმართულება აქვთ და $|A_1B_1|$ -ს წინააღმდეგ შემთხვევაში.

$\vec{AB}$ ვექტორის გეგმილი l ღერძზე გვერ $\vec{AB}$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

ადვილია იმის სვენება, რომ თუ $\vec{AB}$ ვექტორსა და l ღერძს შორის კუთხეა α , მაშინ

$$\text{გვერ } \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \alpha. \quad (1)$$

ცხადია, რომ ტოლ ვექტორებს ერთსა და იმავე ღერძზე ტოლი გეგმილები აქვთ.

ვექტორის გეგმილს ღერძზე გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. ვექტორთა ჯამის გეგმილი რაიმე ღერძზე შესაკრებ ვექტორთა გეგმილების ჯამის ტოლია.
2. ვექტორის რიცხვზე ნამრავლის გეგმილი უდრის ვექტორის გეგმილის ამავე რიცხვზე ნამრავლს.

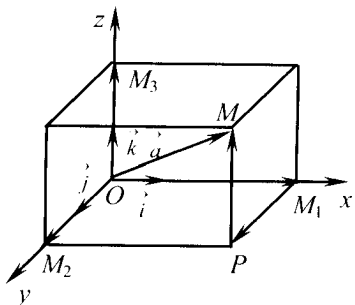
განვიხილოთ ახლა დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა ხევრცეში $Oxyz$. ვთქვათ, $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ შესაბამისად Ox ,

Oy და Oz ღერძების მიმართულების მქონე ერთეულოვანი ვექტორებია (ნახ. 172). ცხადია, ეს ვექტორები არაკომპლანარულია.

თეორემა 30.2. ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორი ერთადერთი სახით წარმოიდგინება $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ვექტორებით:

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad (2)$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\vec{a}$ ნებისმიერი ვექტორია. მოვღოთ იგი



ნახ. 172

კოორდინატა სათავეზე ($\vec{OM} = \vec{a}$, ნახ. 172). M წერტილზე გავავლოთ საკოორდინატო სიბრტყეების პარალელური სიბრტყეები. მივიღებთ მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის ერთ-ერთი დიagonalია $\vec{OM}$ ვექტორი. ნახაზიდან ნახს, რომ

$$\vec{a} = \vec{OM} = \vec{OM_1} + \vec{M_1P} + \vec{PM}.$$

რადგან $\vec{M_1P} = \vec{OM_2}$ და $\vec{PM} = \vec{OM_3}$, ამიტომ

$$\vec{a} = \vec{OM_1} + \vec{OM_2} + \vec{OM_3}. \quad (3)$$

ამასთან

$$\vec{OM_1} = x \cdot \vec{i}, \quad \vec{OM_2} = y \cdot \vec{j}, \quad \vec{OM_3} = z \cdot \vec{k}.$$

ამ ტოლობების ჩასმით (3)-ში მივიღებთ (2)-ს.

ვანვენთ, რომ (2) წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ (2) ტოლობასთან ერთად ადგილი აქვს ტოლობას

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}. \quad (4)$$

(2) და (4)-დან მივიღებთ

$$(x - x_1) \vec{i} + (y - y_1) \vec{j} + (z - z_1) \vec{k} = \vec{0}. \quad (5)$$

ვინაიდან $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ არაკომპლანარული ვექტორებია (5) ტოლობას ადგილი აქვს მხოლოდ მაშინ, როდესაც

$$x - x_1 = 0, \quad y - y_1 = 0, \quad z - z_1 = 0,$$

ქ. ი.

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თუ $\vec{a}$ ვექტორი წარმოდგენილია (2) სახით, მაშინ ვიცევით, რომ ეს ვექტორი დაშლილია $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ ვექტორების მიხედვით.

რადგან ყოველი $\vec{a}$ ვექტორისათვის ადგილი აქვს (2) ტოლობას, ამიტომ ვექტორთა $\vec{i}$, $\vec{j}$ და $\vec{k}$ დალაგებულ სამეულს დეკარტის მართკუთხა (ორთონორმირებული) ბაზისი ეწოდება, ხოლო x , y , z რიცხვებს $\vec{a}$ ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები და ჩავწერთ $\vec{a} = \{x, y, z\}$.

როგორც თეორემის დამტკიცებიდან ჩანს $\vec{OM}$ რადიუს-ვექტორის* კოორდინატები უდრის მისი ბოლო M წერტილის კოორდინატებს.

ცხადია, რომ, თუ $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ და $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$, მაშინ:

1. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} + (z_1 + z_2) \vec{k}$,
2. $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1) \vec{i} + (\lambda y_1) \vec{j} + (\lambda z_1) \vec{k}$,
3. $\vec{a} = \vec{b}$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.
4. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების კოლინეარობის პირობაა

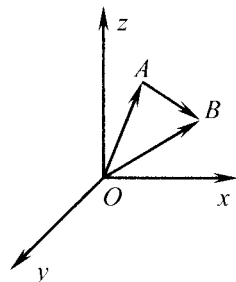
$$x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad z_1 = \lambda z_2.$$

ეს პირობა ასეც შეიძლება ჩაიწეროს

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

ორი ვექტორის კოლინეარობის პირობას ასეთი სახით ფორმალურად ჩავწერთ იმ შემთხვევაშიც, როცა ამ ვექტორების შესაბამის კოორდინატთა რომელიმე წევრი ნულოვანია.

თეორემა 30.3. ვექტორის კოორდინატები უდრის მისი ბოლო წერტილისა და სათავეს სათანადო კოორდინატების სხვაობას.



ნახ. 173

* სათავეზე მოდებული $\vec{OM}$ ვექტორს M წერტილის რადიუს-ვექტორი ეწოდება.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულია $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$ წერტილები, მაშინ

$$\vec{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

ნახ. 173-დან გვაქვს

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}. \quad (6)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი (მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები, იხ. §23). ვთქვათ, მოცემულია $M_1(x_1; y_1; z_1)$ და $M_2(x_2; y_2; z_2)$ წერტილები. M_1M_2 მონაკვეთის შუაზე გაყოფა ნიშნავს ისეთი M წერტილის (შუაწერტილის) მოძებნას, რომლისთვისაც

$$\vec{M_1M} = \vec{MM_2}. \quad (7)$$

ვიპოვოთ M წერტილის კოორდინატები.

თუ M -ის კოორდინატებია x, y, z , მაშინ

$$\vec{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}, \quad \vec{MM_2} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\}.$$

ამიტომ (7)-დან მიიღება

$$x - x_1 = x_2 - x, \quad y - y_1 = y_2 - y, \quad z - z_1 = z_2 - z.$$

აქედან

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

III. ვექტორთა სკალარული ნამრავლი

განსაზღვრება. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი ეწოდება მათი სიგრძეებისა და მათ შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლს.

$\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი აღინიშნება $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ან $\left(\vec{a}, \vec{b} \right)$ სიმბოლოთი. მაშასადამე, განსაზღვრებით

$$\left(\vec{a}, \vec{b} \right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha, \quad (8)$$

სადაც α არის $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე, ე. ი. $\alpha = \widehat{\vec{a}, \vec{b}}$. თუ მხედველობაში მივიღებთ ვექტორის ღერძზე გეგმილის (1) გამოსახულებას, (8) ტოლობა შეიძლება ასე გადავწეროთ:

$$\left(\vec{a}, \vec{b} \right) = |\vec{a}| \text{გვერდიწივ } \vec{b} = |\vec{b}| \text{გვერდიწივ } \vec{a}, \quad (9)$$

ხადაც გვერდიწივ $\vec{b}$ არის $\vec{b}$ ვექტორის გვერდიწივ $\vec{a}$ ვექტორით განსაზღვრულ ღერძზე. ამრიგად, ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის ერთ-ერთი ვექტორის სიგრძისა და ამ ვექტორზე მეორე ვექტორის გვერდიწივ ნამრავლს.

(9) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\text{გვერდიწივ } \vec{a} = \left(\vec{a}, \vec{e} \right),$$

ხადაც $\vec{e}$ ერთეულოვანი ვექტორია. კერძოდ, თუ $\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, მაშინ

$$x = \left(\vec{a}, \vec{i} \right), \quad y = \left(\vec{a}, \vec{j} \right), \quad z = \left(\vec{a}, \vec{k} \right),$$

ე. ი. ვექტორის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატები უდრის ამ ვექტორის გვერდიწივებს შესაბამის ღერძებზე.

სკალარულ ნამრავლს აქვს შემდეგი თვისებები:

1. სკალარული ნამრავლი გადანაცვლებადია: $\left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \left(\vec{b}, \vec{a} \right)$.

2. სკალარული ნამრავლი ნულის ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ვექტორები ურთიერთმართობულია ან ერთი მათგანი მაინც ნულ-ვექტორია. ე. ი. ორი ვექტორის მართობულობის პირობაა მათი სკალარული ნამრავლის ნულთან ტოლობა.

3. ნებისმიერი $\vec{a}$ ვექტორისათვის $\left(\vec{a}, \vec{a} \right) = |\vec{a}|^2$, ე. ი.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\vec{a}, \vec{a} \right)}.$$

4. საკოორდინატო ღერძების $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ მკეზავებისათვის მართებულია ტოლობები:

$$\left(\vec{i}, \vec{i} \right) = \left(\vec{j}, \vec{j} \right) = \left(\vec{k}, \vec{k} \right) = 1,$$

$$\left(\vec{i}, \vec{j} \right) = \left(\vec{j}, \vec{k} \right) = \left(\vec{i}, \vec{k} \right) = 0.$$

5. სკალარული ნამრავლი დისტრიბუციულია ვექტორთა შეკრების ოპერაციის მიმართ, ე. ი.

$$\left(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) + \left(\vec{a}, \vec{c}\right).$$

6. ნებისმიერი $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებისა და λ რიცხვისათვის

$$\left(\lambda \vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}, \lambda \vec{b}\right) = \lambda \left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

მართებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა 30.4. ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი უდრის მათი ერთსახელა კოორდინატების ნამრავლთა ჯამს, ე. ი. თუ

$$\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\} \text{ და } \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \text{ მაშინ}$$

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

დამტკიცება. რადგან $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ და $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$, ამიტომ 4, 5 და 6 თვისებების ძალით

$$\begin{aligned} \left(\vec{a}, \vec{b}\right) &= \left(x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}\right) = x_1 x_2 \left(\vec{i}, \vec{i}\right) + \\ &+ x_1 y_2 \left(\vec{i}, \vec{j}\right) + x_1 z_2 \left(\vec{i}, \vec{k}\right) + y_1 x_2 \left(\vec{j}, \vec{i}\right) + y_1 y_2 \left(\vec{j}, \vec{j}\right) + y_1 z_2 \left(\vec{j}, \vec{k}\right) + \\ &+ z_1 x_2 \left(\vec{k}, \vec{i}\right) + z_1 y_2 \left(\vec{k}, \vec{j}\right) + z_1 z_2 \left(\vec{k}, \vec{k}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების მართობულობის პირობა კოორდინატებში ასე ჩაიწერება:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0.$$

შედეგი 2. $\vec{a} = \{x, y, z\}$ ვექტორის სიგრძე გამოითვლება ფორმულით

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

შედეგი 3. მანძილი $A(x_1, y_1, z_1)$ და $B(x_2, y_2, z_2)$ წერტილებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

ამ შედეგის მართბულობა გამომდინარეობს (6) ფორმულიდან და შედეგი 2-დან.

შედეგი 4. კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\cos \left(\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b} \right) = \frac{\left(\overset{\cdot}{a}, \overset{\cdot}{b} \right)}{|\overset{\cdot}{a}| |\overset{\cdot}{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

IV. პარალელური გადატანა ვექტორით

როგორც ვიცით (იხ. §29) პარალელური გადატანა არის ასახვა (გარდაქმნა), რომლითაც სიბრტყის ნებისმიერი წერტილი ერთსა და იმავე მანძილზე, ერთი და იმავე მიმართულებით გადაადგილდება. თუ T პარალელური გადატანაა, მაშინ ის სახეებით განისაზღვრება შეხებადის წერტილთა რაიმე ერთი დალაგებული $(A; T(A))$ წყვილის მოცემით, ანუ $\overrightarrow{AB}$ ვექტორის მოცემით, სადაც $B = T(A)$. გამომდინარე აქვდან, თუ $X'(x'; y')$ არის $X(x; y)$ წერტილის სახე, მაშინ

$$\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}. \quad (10)$$

ამ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ T არის პარალელური გადატანა $\overrightarrow{AB}$ ვექტორით. ამასთან, თუ $\overrightarrow{AB} = \{a; b\}$, მაშინ (10) ტოლობიდან მიიღება (იხ. §29)

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases} \quad (11)$$

ამ ფორმულებით X -ის კოორდინატებით გამოითვლება X' -ის კოორდინატები, ამიტომ ზოგჯერ ვიტყვით, რომ პარალელური გადატანა მოცემულია კოორდინატებით.

ამოცანა 1. ვთქვათ, T პარალელური გადატანა განისაზღვრება ვექტორით $\vec{P}(-2; 3)$. ვიპოვოთ $A(4; -5)$ წერტილის სახე ამ პარალელური გადატანისას.

ამოხსნა. თუ $A'(x'; y')$ არის A წერტილის სახე ამ პარალელური გადატანის, მაშინ (11) ფორმულებიდან გვაქვს:

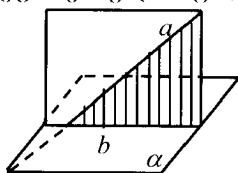
$$x' = 2, \quad y' = -2.$$

ამოცანა 2. ვიპოვოთ ვექტორი, რომლითაც განისაზღვრება T პარალელური გადატანა, რომლისთვისაც $T(A) = B$, თუ $A(-3; 1)$, $B(2; -1)$.

ამოხსნა. $\vec{a}(x; y)$ ვექტორის კოორდინატები, რომლითაც განისაზღვრება T პარალელური გადატანა გამოითვლება (11) ფორმულებით $x = 5$, $y = -2$.

**§31. კუთხეები წრფეებსა და სიბრტყეებს შორის.
მრავალკუთხედის ორთოგონალური გეგმილის ფართობი**

ორი ურთიერთგადაამკვეთი წრფე ქმნის მოსაზღვრე და ვერტიკალურ კუთხეებს. ვერტიკალური კუთხეები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო მოსაზღვრე კუთხეები ერთმანეთს 180° -მდე ავსებენ. ამ კუთხეთაგან უმცირესს წრფეებს შორის კუთხე ეწოდება. განსაზღვრების თანახმად ურთიერთმართობულ წრფეებს შორის კუთხე 90° -ის ტოლია. პარალელურ წრფეებს შორის კუთხე ნულის ტოლად ჩაითვალით.

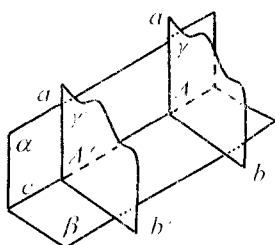


ნახ. 174

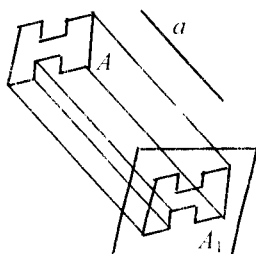
აცდენილ წრფეებს შორის კუთხე ეწოდება ამ წრფეების პარალელურ ურთიერთგადაამკვეთ წრფეებს შორის კუთხეს. მტკიცდება, რომ ეს კუთხე არ არის დამოკიდებული ურთიერთგადაამკვეთი წრფეების შერჩევაზე.

ადრე მოცემული განსაზღვრების თანახმად ურთიერთმართობული ისეთ წრფეებს ეწოდება, რომლებიც ერთმანეთს მართი კუთხით კვეთს. მაგრამ აცდენილ წრფეებსაც ზოგჯერ ურთიერთმართობულს უწოდებენ, თუ მათ შორის კუთხე 90° -ის ტოლია.

განვსაზღვროთ წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხის ცნება. ვთქვათ α არის სიბრტყე, ხოლო a — ამ სიბრტყის გადაამკვეთი მისი არამართობი წრფე (ნახ. 174). a წრფის წერტილებიდან α სიბრტყეზე დაშვებული მართობების ფუძეები b წრფეზე ძეგს, ამ წრფეს ეწოდება a წრფის გეგმილი α სიბრტყეზე. წრფესა და სიბრტყეს შორის კუთხე ეწოდება კუთხეს ამ წრფესა და სიბრტყეზე მის გეგმილს შორის. მიღებულია, რომ კუთხე წრფესა და მის პარალელურ სიბრტყეს შორის ნულის ტოლია, ხოლო კუთხე ურთიერთმართობულ წრფესა და სიბრტყეს შორის 90° -ის ტოლია.



ნახ. 175



ნახ. 176

განვსაზღვროთ სიბრტყეებს შორის კუთხის ცნება. პარალელურ სიბრტყეებს შორის კუთხე ნათვალათ ნელის ტოლად.

ვთქვათ, მოცემული სიბრტყეები ერთმანეთს კვეთს. გავავლოთ მათი გადაკვეთის წრფის მართობული სიბრტყე. ეს სიბრტყე მოცემულ სიბრტყეებს ორ წრფეზე კვეთს. ამ წრფეებს შორის კუთხეს ეწოდება კუთხე ორ მოცემულ სიბრტყეს შორის (ნახ. 175). მტკიცდება, რომ ორ სიბრტყეს შორის კუთხე არ არის დამოკიდებული მკვეთი სიბრტყის შერჩევაზე.

სიბრტყეზე სივრცულ ფიგურათა გამოსახვისათვის ნეკულებრივად პარალელურ დაგვიძიდებას იყენებენ. გავცნოთ ფიგურის გამოსახვის ამ ხერხს. ავიღოთ ნებისმიერი a წრფე, რომელიც მოცემულ სიბრტყეს კვეთს. ფიგურის ნებისმიერ A წერტილზე გავავლოთ a -ს პარალელური წრფე. ამ წრფისა და მოცემული სიბრტყის გადაკვეთის A_1 წერტილი იქნება A წერტილის გამოსახულება (ნახ. 176). თუ ასეთნაირად ავაგებთ ფიგურის თითოეული წერტილის გამოსახულებას – მივიღებთ თვით ფიგურის გამოსახულებას, რომელსაც მოცემული ფიგურის პარალელური გვემდის ეწოდება.

ფიგურის ორთოგონალური გვემდის მოცემულ სიბრტყეზე ეწოდება ამ ფიგურის პარალელურ გვემდის სიბრტყისადმი მართობული მხართულებით.

თეორემა 311. მრავალკუთხედის ორთოგონალური გვემდის ფართობი მრავალკუთხედის ფართობისა და მრავალკუთხედის სიბრტყესა და გვემდის სიბრტყეს შორის კუთხის კოსინუსის ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ სამკუთხედი და მისი გვემდის იმ სიბრტყეზე, რომელიც სამკუთხედის ერთ-ერთ გვერდზე გადის (ნახ. 177). ABC სამკუთხედის გვემდის α სიბრტყეზე არის ABC_1 სამკუთხედი, სადაც $CC_1 \perp \alpha$. გავავლოთ სამკუთხედის CD სიმაღლე. სამი მართობის თეორემის თანახმად C_1D არის ABC_1 სამკუთხედის სიმაღლე. CDC_1 კუთხე ABC სამკუთხედის

სიბრტყესა და გვერდის სიბრტყეს (α სიბრტყეს) შორის კუთხის ტოლია. გვაქვს $C_1D = CD \cdot \cos \varphi$,

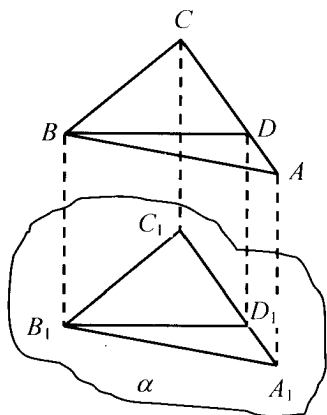
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD, \quad S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D,$$

აქედან

$$S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi.$$

ამრიგად, განხილულ შემთხვევაში თეორემა მართებულია. თეორემა მართებულია იმ შემთხვევაშიც, როცა α სიბრტყის ნაცვლად აღებულია მისი პარალელური სიბრტყე. მართლაც პარალელურ სიბრტყეებზე ფიგურის გვერდები და გვერდების მიმართულებით პარალელური გადატანისას ერთმანეთს ემთხვევა. პარალელური გადატანით შეთავსებული ფიგურები კი ერთმანეთის ტოლია.

ახლა ვთქვათ, რომ ABC სამკუთხედის არცერთი გვერდი α სიბრტყის პარალელური არ არის (ნახ. 178). დაეუშვათ, რომ



ნახ. 178

გვერდების ფართობთა შემთხვევაზე.

მრავალკუთხედისათვის განხილულ შემთხვევაზე, გავლებული დიაგონალებით იგი დაიყოფა სამკუთხედებად. თეორემა დამტკიცებულია.

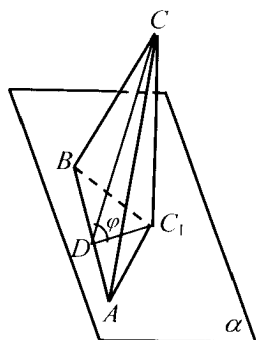
მანძილი B წერტილიდან α სიბრტყემდე მეტია მანძილზე A წერტილიდან α სიბრტყემდე და ნაკლებია მანძილზე C წერტილიდან α სიბრტყემდე. D იყოს B წერტილზე α სიბრტყის პარალელურად გამავალი სიბრტყის AC მონაკვეთთან გადაკვეთის წერტილი. ცხადია ABC სამკუთხედი იყოფა ორ ABD და CBD სამკუთხედად, რომელთა საერთო BD გვერდი α სიბრტყის პარალელურია.

ვინაიდან ABC სამკუთხედის გვერდის ფართობი α სიბრტყეზე უდრის ABD და CBD სამკუთხედების ჯამს, დამტკიცება დაიყვანება წინა

დამტკიცება დაიყვანება უკვე

ვინაიდან რომელიმე წვეროდან

სამკუთხედებად.

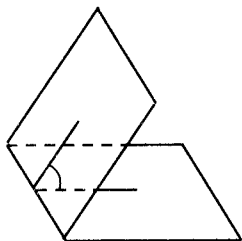


ნახ. 177

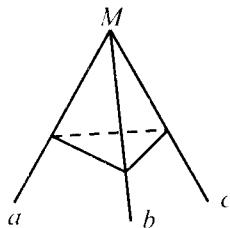
§32. მრავალწახნაგები

I. მრავალწახნაგა კუთხეები

განსაზღვრება. საერთო საზღვრის მქონე ორი ნახევარსიბრტყით შემოსაზღვრულ სივრცის ნაწილს, თვით ამ ნახევარსიბრტყეების



ნახ. 179



ნახ. 180

ნათვლით ორწახნაგა კუთხე ეწოდება (ნახ. 179). ამ ნახევარსიბრტყეებს წახნაგები ეწოდება, ხოლო მათ შემოსაზღვრულ საერთო წრფეს – ორწახნაგა კუთხის წიბო.

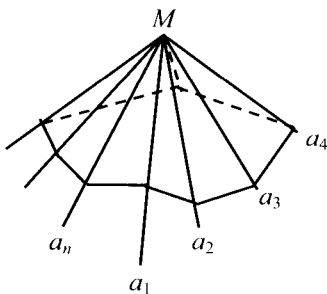
ორწახნაგა კუთხის წიბოს მართობული სიბრტყე წახნაგებს ორ სხივზე კვეთს. ამ სხივებით შექმნილ კუთხეს ორწახნაგა კუთხის საზოგადო კუთხე ეწოდება. ორწახნაგა კუთხის ზომად მიღებულია მისი შესაბამისი საზოგადო კუთხის ზომა. ორწახნაგა კუთხის ზომა არ არის დამოკიდებული საზოგადო კუთხის არსევაზე, რადგან პარალელური გადატანით საზოგადო კუთხეები ერთმანეთს შეუთავსდება.

განსაზღვრება. საერთო სათავის მქონე სამი სხივით შედგენილი სამი კუთხით შემოსაზღვრულ სივრცის ნაწილს, თვით ამ კუთხეების ნათვლით, სამწახნაგა კუთხე ეწოდება. (ნახ. 180). ამ კუთხეებს სამწახნაგა კუთხის წახნაგები ეწოდება, ხოლო მათ გვერდებს – წიბოები. ბრტყელი კუთხეების საერთო წვეროს სამწახნაგა კუთხის წვერო ეწოდება.

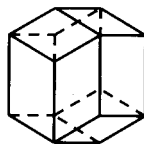
ანალოგიურად განისაზღვრება მრავალწახნაგა კუთხე (ნახ. 181). მრავალწახნაგა კუთხისათვის წახნაგი, წიბო და წვერო ისევე განისაზღვრება, როგორც სამწახნაგა კუთხისათვის.

II. მრავალწახნაგა

განსაზღვრება. მრავალწახნაგა ეწოდება სხეულს, რომელიც შემოსაზღვრულია სასრული რაოდენობის სიბრტყეებით (ნახ. 182). მრავალწახნაგას საზღვარს მისი ზედაპირი ეწოდება.



ნახ. 181



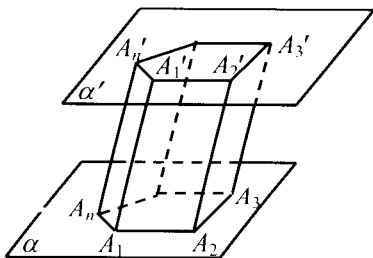
ნახ. 182

მრავალწახნაგას ამოზნექილი ეწოდება, თუ იგი მისი შემოსაზღვრული თითოეული სიბრტყის ერთ მხარეზე ძევს. ამოზნექილი მრავალწახნაგას ზედაპირის და მისი შემოსაზღვრული ერთ-ერთი სიბრტყის საერთო ნაწილს წახნაგი ეწოდება. მრავალწახნაგას წახნაგები წარმოადგენენ მრავალკუთხედებს, რომელთა გვერდებს მრავალწახნაგას წიბოები ეწოდება, ხოლო წვეროებს – მრავალწახნაგას წვეროები.

III. პრიზმა

განსაზღვრება. მრავალწახნაგას, რომლის ორი წახნაგი პარალელურ სიბრტყეებში მათავსებული n -კუთხედებია, ხოლო დანარჩენი n წახნაგი პარალელოგრამებს წარმოადგენენ, n -კუთხა პრიზმა ეწოდება (ნახ. 183).

პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე n -კუთხედებს პრიზმის ფუძეები ეწოდება, ხოლო დანარჩენ წახნაგებს – გვერდითი წახნაგები. პრიზმის იმ წიბოებს, რომლებიც ფუძეების გვერდებს არ წარმოადგენენ გვერდითი წიბოები ეწოდება. ყველა გვერდი-



ნახ. 183

თი წიბო ერთმანეთის პარალელურია.

ცხადია, რომ პრიზმის ფუძეები ტოლი მრავალკუთხედებია, რადგან პარალელური გადატანით ისინი ერთმანეთს შეუთავსდებიან.

პრიზმის ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან მეორე ფუძის შემცველ სიბრტყეზე დაშვებულ მართობს პრიზმის სიმაღლე ეწოდება. მონაკვეთს, რომელიც ერთ წახნაგზე არამდებარე ორ წვეროს აერთებს, პრიზმის დიაგონალი ეწოდება. კვეთას, რომელიც მიიღება პრიზმის სხვადასხვა გვერდით წახნაგზე მდებარე ორ გვერდით წიბოზე გამავალი სიბრტყით, დიაგონალური კვეთა ეწოდება. კვეთას, რომელიც პრიზმის ექველა გვერდით წიბოს კვეთს და მათი მართობულია პერპენდიკულარული კვეთა ეწოდება.

პრიზმას მართი ეწოდება თუ მისი გვერდითი წიბოები ფუძეების მართობულია. წინააღმდეგ შემთხვევაში პრიზმას დახრილი ეწოდება. მართ პრიზმას წესიერი ეწოდება, თუ მისი ფუძეები წესიერი მრავალკუთხედებია.

პრიზმის გვერდითი ზედაპირი (გვერდითი ზედაპირის ფართობი) ეწოდება გვერდითი წახნაგების ფართობთა ჯამს, ხოლო სრული ზედაპირი გვერდითი ზედაპირისა და ფუძეების ფართობთა ჯამს.

თეორემა 32.1. მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირი ფუძის პერიმეტრისა და პრიზმის სიმაღლის, ე. ი. გვერდითი წიბოს, ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. მართი პრიზმის გვერდითი წახნაგები მართკუთხედებია. ამ მართკუთხედების ფუძეები პრიზმის ფუძეში მდებარე მრავალკუთხედის გვერდებია, ხოლო სიმაღლეები გვერდითი წიბოს ტოლია. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ პრიზმის გვერდითი ზედაპირი

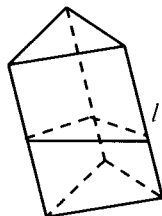
$$S = a_1 l + a_2 l + \dots + a_n l = p l.$$

ხლად; p პრიზმის ფუძის პერიმეტრია, ხოლო l – გვერდითი წიბოს სიგრძე. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 32.2. დახრილი პრიზმის გვერდითი ზედაპირი პერპენდიკულარული კვეთის პერიმეტრისა და გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. პრიზმის გვერდითი წახნაგები პარალელოგრამებია (ნახ. 184). თითოეული პარალელოგრამის ფართობი გვერდითი წიბოსა და პერპენდიკულარული კვეთის შესაბამისი გვერდის ნამრავლის ტოლია. ამრიგად

$$S = h_1 l + h_2 l + \dots + h_n l = p l.$$



ნახ. 184

ხადაც l გვერდითი წიბოს სიგრძეა, $h_1, h_2, \dots, h_n$ პერპენდიკულარული კვეთის გვერდებია, ხოლო p ამ კვეთის პერიმეტრია. თეორემა დამტკიცებულია.

IV. პარალელებიპედი

პრიზმას, რომლის ფუძე პარალელოგრამია, პარალელებიპედი ეწოდება. ცხადია, პარალელებიპედის ყველა წახნაგი პარალელოგრამია.

პარალელებიპედის იმ წახნაგებს, რომლებსაც ხაერთო წვერო არა აქვთ, მოპირდაპირე წახნაგები ეწოდება.

თეორემა 32.3. პარალელებიპედის მოპირდაპირე წახნაგები ერთმანეთის პარალელურია და ტოლია.

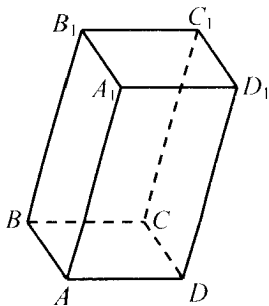
დამტკიცება. განვიხილოთ პარალელებიპედის ორი მოპირდაპირე წახნაგი, მაგალითად, AA_1D_1D და BB_1C_1C (ნახ. 185). რადგან პარალელებიპედის ყველა წახნაგი პარალელოგრამია, ამიტომ $AD \parallel BC$ და $AA_1 \parallel BB_1$. აქედან კი გამოდინარეობს, რომ განსახილველი წახნაგების სიბრტყეები ერთმანეთის პარალელურია.

AA_1D_1D წახნაგი AB წიბოს გასწვრივ პარალელური გადატანისას BB_1C_1C წახნაგს შეუთავსდება, რადგან AB, A_1B_1, D_1C_1 და DC მონაკვეთები ერთმანეთის პარალელური და ტოლია. მაშასადამე, ეს წახნაგები ტოლია.

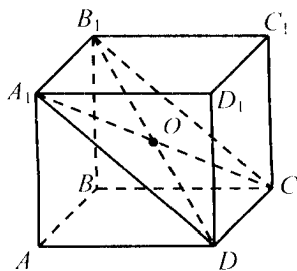
ანალოგიურად მტკიცდება პარალელებიპედის ნებისმიერი ორი მოპირდაპირე წახნაგის პარალელურობა და ტოლობა. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 32.4. პარალელებიპედის დიაგონალები ერთმანეთს ერთ წერტილში კვეთს და გადაკვეთის წერტილით შეაზუ იყოფა.

დამტკიცება. განვიხილოთ პარალელებიპედის რომელიმე ორი



ნახ. 185



ნახ. 186

დიაგონალი, მაგალითად, A_1C და B_1D (ნახ. 186). რადგან $ABCD$ და AA_1B_1B საერთო AB გვერდის მქონე პარალელოგრამებია, ამიტომ $A_1B_1 \parallel DC$ და $A_1B_1 = DC$. მაშასადამე, A_1B_1CD პარალელოგრამია. პარალელეპიპედის A_1C და B_1D დიაგონალები ამ პარალელოგრამის დიაგონალებია, ამიტომ ისინი ერთმანეთს კვეთს და გადაკვეთის O წერტილი თითოეულს შუაზე ყოფს. ანალოგიურად მტკიცდება, რომ პარალელეპიპედის ნებისმიერი ორი დიაგონალი ერთმანეთს კვეთს და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა. აქედან დავასკვნით, რომ პარალელეპიპედის ოთხივე დიაგონალი ერთ წერტილში იკვეთება და გადაკვეთის წერტილით შუაზე იყოფა. თეორემა დამტკიცებულია.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ პარალელეპიპედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი ამ პარალელეპიპედის სიმეტრიის ცენტრია.

მართ პარალელეპიპედს, რომლის ფუძე მართკუთხეა, მართკუთხა პარალელეპიპედი ეწოდება. ცხადია, რომ მართკუთხა პარალელეპიპედის ყველა წახნაგი მართკუთხეა.

მართკუთხა პარალელეპიპედს, რომლის ყველა წიბო ტოლია, კუბი ეწოდება.

მართკუთხა პარალელეპიპედის არაპარალელური წიბოების სიგრძეებს, მისი განზომილებები ეწოდება. მართკუთხა პარალელეპიპედს აქვს სამი განზომილება.

თეორემა 32.5. მართკუთხა პარალელეპიპედის ნებისმიერი დიაგონალის კვადრატი მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამის ტოლია.

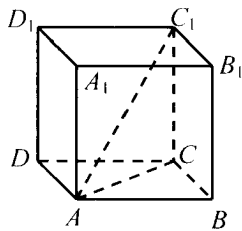
დამტკიცება. განვიხილოთ მართკუთხა $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ პარალელეპიპედი (ნახ. 187). მართკუთხა AC_1C სამკუთხედიდან პითაგორას თეორემის თანახმად:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2.$$

მართკუთხა ACB სამკუთხედიდან პითაგორას თეორემით მივიღებთ: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. ამრიგად,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

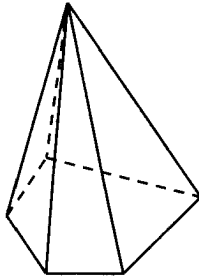


ნახ. 187

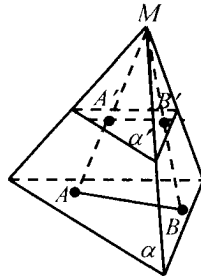
V. პირამიდა

განსაზღვრება. მრავალწახნაგას, რომლის ერთ-ერთი წახნაგი ნებისმიერი მრავალკუთხედიია, ხოლო დანარჩენი წახნაგები – ხაერთო წვეროს მქონე სამკუთხედებია, პირამიდა ეწოდება (ნახ. 188).

ამ მრავალკუთხედს პირამიდის ფუძე ეწოდება, ხოლო ხაერთო წვეროს მქონე ხაზკუთხედებს – გვერდითი წახნაგები. გვერდითი წახნაგების ხაერთო წვეროს პირამიდის წვერო ეწოდება. წიბოებს, რომლებიც ფუძის გვერდებს არ წარმოადგენენ, გვერდითი წიბოები ეწოდება. პირამიდის წვეროდან ფუძის შემცველ სიბრტყეზე დაშვებულ მართობს პირამიდის სიმაღლე ეწოდება.



68b. 188



686. 189

პირამიდას ეწოდება n -კუთხა, თუ მისი ფუძე n -კუთხედია. სამკუთხა პირამიდას ტეტრაედრი ეწოდება.

თეორემა 32.6. პირამიდის ფუძის პარალელური სიბრტყე, რომელიც ამ პირამიდას კვეთს, მისგან მსგავს პირამიდას ჩამოკვეთს.

დამტკიცება. ვთქვათ, M არის პირამიდის წვერო, α - მისი ფუძის სიბრტყე და α' - გადამკვეთი სიბრტყე (ნახ. 189). პირამიდის ფუძეზე ავიღოთ ნებისმიერი ორი A და B წერტილი. AM და BM მონაკვეთები α' სიბრტყეს A' და B' წერტილებში კვეთს. $AB \parallel A'B'$, როგორც α და α' , პარალელური სიბრტყეების შესამე (AMB სამკუთხედის) სიბრტყით გადაკვეთისას მიღებული წრფეები. მაშასადამე, $\triangle AMB \sim \triangle A'MB'$, საიდანაც $\frac{A'M}{AM} = \frac{B'M}{BM}$. ე. ი.

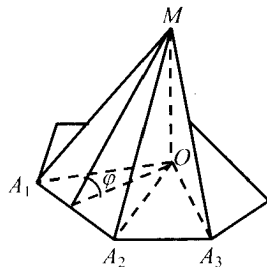
$\frac{A'M}{AM} = k$ შეფარდება არ არის დამოკიდებული A წერტილის
შერჩევაზე.

აქედან გამომდინარეობს, რომ α' სიბრტყით სამოკვეთილი პირამიდა მოცემული პირამიდისაგან მიიღება წერტილის მიმართ იმ პოლოთეტიის გარდაქმნით, რომლის კოეფიციენტია k . პოლოთეტიური ფიგურები კი მსგავსია. თეორემა დამტკიცებულია.

შენიშნოთ, რომ პოლოთეტიის თვისებებიდან გამომდინარეობს: მსგავსი პირამიდების ფუძეების ფართობთა შეფარდება ამ პირამიდების სიმაღლეთა შეფარდების კვადრატის ტოლია.

პირამიდის გვერდითი ზედაპირი ეწოდება მისი გვერდითი წახნაგების ფართობთა ჯამს, ხოლო სრული ზედაპირი – გვერდითი ზედაპირისა და ფუძის ფართობის ჯამს.

გთქვამთ, მოცემულია პირამიდა, რომლის ფუძე $A_1A_2...A_n$ მრავალკუთხედი და თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის φ კუთხეს (ნახ. 190). ფუძის ფართობი აღენიშნოთ Q -თი. გავავლოთ პირამიდის MO სიმაღლე და O წერტილი შევეერთოთ ფუძის წვეროებთან. ფუძე დაიყოფა სამკუთხედებად, რომლებიც წარმოადგენენ გვერდითი წახნაგების ორთოგონალურ გვერდებს. ორთოგონალური გვერდის ფართობის გამოსათვლელი ფორმულის თანახმად



ნახ. 190

$$S_{A_1A_2M} = \frac{S_{A_1A_2O}}{\cos \varphi}, \quad S_{A_2A_3M} = \frac{S_{A_2A_3O}}{\cos \varphi} \dots$$

თუ ამ ტოლობებს წევრ-წევრად შევკრებთ, მარცხენა მხარეში მივიღებთ პირამიდის გვერდით ზედაპირს, ხოლო მარჯვენა მხარეში – ფუძის ფართობს გაყოფილს $\cos \varphi$ -ზე. ამრიგად ასეთი სახის პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $\frac{Q}{\cos \varphi}$.

პირამიდას ეწოდება წესიერი, თუ მისი ფუძე წესიერი მრავალკუთხედაა, ხოლო სიმაღლის ფუძე ამ მრავალკუთხედის ცენტრს ემთხვევა. წესიერი პირამიდის ღერძი ეწოდება წრფეს, რომელიც მის სიმაღლეს შეიცავს. წესიერი პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია. მაშასადამე, გვერდითი წახნაგები ტოლი ტოლფერდა სამკუთხედებია. წესიერი პირამიდის გვერდითი წახნაგის სიმაღლეს, რომელიც გავლებულია პირამიდის წვეროდან, ანოთემა ეწოდება.

ტეიტრაედრს, რომლის ყველა წიბო ტოლია წესიერი ტეიტრაედრი ეწოდება.

თეორემა 32.7. წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირი ფუძის ნახევარპერიმეტრისა და ანოთემის ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. თუ ფუძის გვერდია a , ხოლო გვერდების რაოდენობაა n , მაშინ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი იქნება:

$$\frac{al}{2}n = \frac{an}{2}l = \frac{p}{2}l$$
, სადაც l არის აპოთემა, ხოლო p - ფუძის პერიმეტრი. თეორემა დამტკიცებულია.

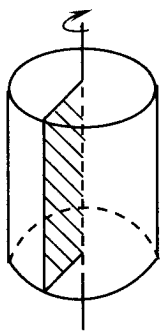
§33. ბრუნვითი სხეულები და მათი ზედაპირის ფართობი

უმარტივეს შემთხვევაში ბრუნვითი სხეული ეწოდება ისეთ სხეულს, რომელსაც რაიმე წრფის (ბრუნვის ღერძის) მართობული სიბრტყეები წრეებზე კვეთს, რომელთა ცენტრები ამ წრეებზე მდებარეობს. ბრუნვითი სხეულის მაგალითებია წრიული ცილინდრი, კონუსი, ბირთვი.

I. ცილინდრი

განსაზღვრება. მართი ცილინდრი ეწოდება სხეულს, რომელიც მიიღება მართკუთხედის ბრუნვით მისი გვერდის შემცველი წრფის გარშემო (ნახ. 191).

ვინაიდან ჩვენ სხვა სახის ცილინდრს არ განვიხილავთ, ამიტომ შემდგომში მართ ცილინდრს, სიმოკლისათვის, ცილინდრს ვეწოდებთ.



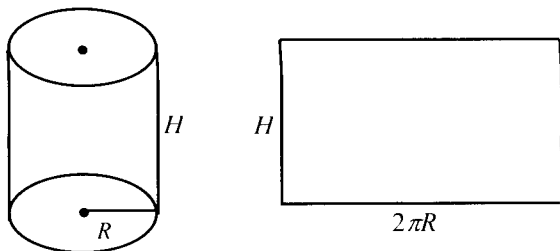
ნახ. 191

ცილინდრის ზედაპირი შედგება პარალელურ სიბრტყეებში მდებარე ორი ტოლი წრისაგან, რომელსაც ცილინდრის ფუძეები ეწოდება და გვერდითი ზედაპირისაგან.

ცილინდრის რადიუსი ეწოდება მისი ფუძის რადიუსს. ცილინდრის ერთ-ერთი ფუძის (ფუძის წრეწირის) ნებისმიერი წერტილიდან მეორე ფუძეზე დაშვებულ მართობს ცილინდრის სიმაღლე (მსახველი) ეწოდება. ცილინდრის ფუძეთა ცენტრებზე გაშვალ წრფეს ცილინდრის ღერძი ეწოდება; იგი მსახველების პარალელურია. ცილინდრის ღერძზე გამავალი სიბრტყით მიღებულ კვეთას ღერძული კვეთა ეწოდება.

წარმოვიდგინოთ ქაღალდის ფურცლისაგან დამზადებული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი. თუ მას გავჭრით ერთ-ერთ მსახველზე და გავშლით ისე, რომ ერთ სიბრტყეში მოთავსდეს, მივიღებთ მართკუთხედს, რომლის ერთი გვერდი ცილინდრის

სიმაღლის ტოლია, ხოლო მეორე გვერდი უდრის ფუძის წრეწირის სიგრძეს (ნახ. 192).



ნახ. 192

ასეთ მართკუთხედს ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი ეწოდება. ცხადია, ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი მისი შლილის ფართობის ტოლია. გამოვძინარე აქედან, ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S_{\text{გვ}} = 2\pi RH,$$

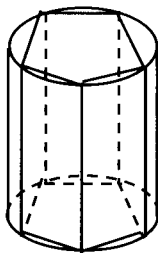
სადაც H ცილინდრის სიმაღლეა, ხოლო R – ფუძის წრეწირის რადიუსი.

ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი კი გამოითვლება ფორმულით:

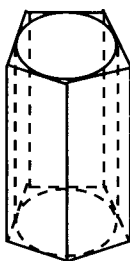
$$S_{\text{სრ}} = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

პრიზმას ეწოდება ცილინდრში ნახაზული, თუ მისი ფუძეები ცილინდრის ფუძეებში ნახაზული მრავალკუთხედებია. პრიზმის გვერდითი წიბოები ცილინდრის მსახველებს წარმოადგენენ (ნახ. 193).

პრიზმას ეწოდება ცილინდრზე შემოხაზული, თუ მისი ფუძეები ცილინდრის ფუძეებზე შემოხაზული მრავალკუთხედებია (ნახ. 194).



ნახ. 193



ნახ. 194

II. კონუსი

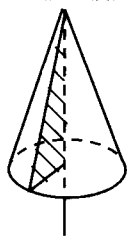
განსაზღვრება. მართი კონუსი ეწოდება სხეულს, რომელიც მიიღება მართკუთხა სამკუთხედის ბრუნვით მისი კათეტის შემცველი წრის გარშემო (ნახ. 195). თვით ამ წრეს კონუსის ღერძი ეწოდება. პიპოტენუსის იმ ბოლოს, რომელიც ღერძზე ძევს კონუსის წვერო ეწოდება.

ვინაიდან ხვენ სხვა კონუსს არ განვიხილავთ, ამიტომ შემდგომში მართ კონუსს, სიმკლისათვის, კონუსს ვეწოდებთ.

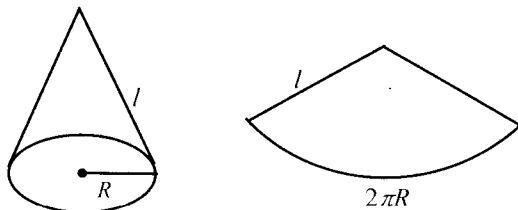
კონუსის ზედაპირი შედგება წრისაგან, რომელსაც კონუსის ფუძე ეწოდება და გვერდითი ზედაპირისაგან.

მონაკვეთს, რომელიც კონუსის წვეროს ფუძის წრეწირის წერტილთან აერთებს, კონუსის მსახველი ეწოდება. კონუსის სიმაღლე ეწოდება მართობს, რომელიც დაშვებულია წვეროდან ფუძის სიბრტყეზე. კვეთას, რომელიც კონუსის ღერძზე გაშვებული სიბრტყით მიიღება, ღერძული კვეთი ეწოდება.

წარმოვიდგინოთ ქაღალდის ფურცლისაგან დამზადებული კონუსის გვერდითი ზედაპირი. თუ მას გავჭრით ერთ-ერთ მსახველზე და გავშლით ისე, რომ ერთ სიბრტყეში მოთავსდეს,



ნახ. 195



ნახ. 196

მივიღებთ წრიულ სექტორს, რომლის რადიუსი კონუსის მსახველის ტოლია, ხოლო რკალის სიგრძე უდრის ფუძის წრეწირის სიგრძეს (ნახ. 196). ასეთ წრიულ სექტორს კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილი ეწოდება. ცხადია, კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი მისი შლილის ფართობის ტოლია. ვინაიდან წრიული სექტორის ფართობი უდრის რადიუსისა და რკალის სიგრძის ნამრავლის ნახევარს (იხ. §22), ამიტომ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S_{\text{ფ.}} = \pi Rl,$$

სადაც l კონუსის მსახველია, ხოლო R – ფუძის წრეწირის რადიუსი.

კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი კი გამოითვლება ფორმულით:

$$S_{\text{სრ.}} = \pi Rl + \pi R^2.$$

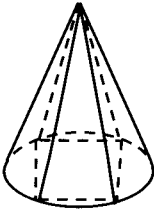
შენიშნათ, რომ

$$\frac{S_{\text{ფ.}}}{S_{\text{სრ.}}} = \frac{\pi R^2}{\pi Rl} = \frac{R}{l} = \cos \varphi,$$

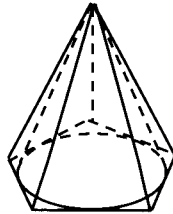
სადაც φ არის კუთხე, რომელსაც მსახველი ადგენს ფუძის სიბრტყესთან. გამოვძიწიანოთ აქედან გვაქვს:

$$S_{\text{ფ.}} = \frac{S_{\text{სრ.}}}{\cos \varphi} = \frac{\pi R^2}{\cos \varphi}.$$

პირამიდას კონუსში წახაზული ეწოდება, თუ მისი ფუძე კონუსის ფუძის წრეწირში წახაზული მრავალკუთხედიანია, ხოლო წვერო – კონუსის წვეროა (ნახ. 197). კონუსში წახაზული პირამიდის გვერდითი წიბოები კონუსის მსახველებია. პირამიდას კონუსზე შემოხაზული ეწოდება, თუ მისი ფუძე კონუსის ფუძეზე შემოხაზული მრავალკუთხედიანია, ხოლო წვერო კონუსის წვეროს ემთხვევა (ნახ. 198).



ნახ. 197



ნახ. 198

III. ბირთვი. სფერო

ბირთვი ეწოდება სივრცის ყველა იმ წერტილისაგან შედგენილ სხეულს, რომლის დაშორება მოცემული წერტილიდან მოცემულ მანძილს არ აღემატება. მოცემულ წერტილს ბირთვის ცენტრი ეწოდება, ხოლო მოცემულ მანძილს – ბირთვის რადიუსი. ბირთვის სახელვარს ეწოდება ბირთვული ზედაპირი,

ანუ სფერო. ამგვარად, სფეროს წერტილები ბირთვის ეველა ის წერტილია, რომელიც ცენტრიდან რადიუსის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. ნებისმიერ მონაკვეთს, რომელიც ბირთვის ცენტრს აერთებს ბირთვის ზედაპირთან, აგრეთვე რადიუსი ეწოდება. მონაკვეთს, რომელიც ბირთვის ზედაპირის ორ წერტილს აერთებს და ბირთვის ცენტრზე გადის, დიამეტრი ეწოდება. ერთიდაიმავე დიამეტრის ბოლოებს ეწოდება ბირთვის დიამეტრალურად მოპირდაპირე წერტილები.

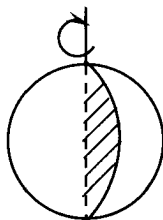
ბირთვი, ისევე როგორც ცილინდრი და კონუსი, ბრუნვით სხეულს წარმოადგენს. იგი მიიღება ნახევარწრის ბრუნვით მისი დიამეტრის შემცველი წრფის გარშემო (ნახ. 199).

მართებულია შემდეგი თეორემები.

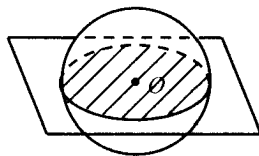
თეორემა 33.1. ბირთვის ყოველი კვეთა სიბრტყით არის წრე. ამ წრის ცენტრი ბირთვის ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყეზე დაშვებული მართობის ფუძეა.

თეორემა 33.2. ბირთვის ცენტრიდან თანაბრად დაშორებული სიბრტყეები ბირთვის ტოლ წრეებზე კვეთენ.

ბირთვის ცენტრზე გამავალ სიბრტყეს დიამეტრალური სიბრტყე ეწოდება. დიამეტრალური სიბრტყით ბირთვის გადაკვეთისას მიღებულ წრეს დიდი წრე ეწოდება (ნახ. 200), ხოლო სფეროს გადაკვეთისას მიღებულ წრეწირს – დიდი წრეწირი.



ნახ. 199



ნახ. 200

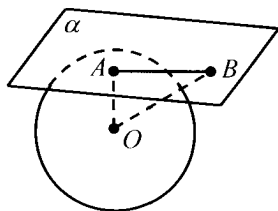
თეორემა 33.3. ბირთვის ნებისმიერი დიამეტრალური სიბრტყე მისი სიმეტრიის სიბრტყეა. ბირთვის ცენტრი მისი სიმეტრიის ცენტრია.

სიბრტყეს, რომელიც ბირთვის ზედაპირის რაიმე წერტილზე გადის და ამ წერტილზე გამავალი რადიუსის მართობულია, მხები სიბრტყე ეწოდება, ამ წერტილს კი – შეხების წერტილი.

თეორემა 33.4. მხებ სიბრტყეს ბირთვთან აქვს მხოლოდ ერთი საერთო წერტილი – შეხების წერტილი.

დამტკიცება. ვთქვათ, α არის ბირთვის მხები სიბრტყე, ხოლო A – შეხების წერტილი (ნახ. 201). ავიღოთ α სიბრტყის A -საგან

განსხვავებული ნებისმიერი B წერტილი. რადგან OA მართობია, ხოლო OB – დახრილი, ამიტომ $OB > OA = R$. მაშასადამე, B წერტილი ბირთვის არ ეკუთვნის. თეორემა დამტკიცებულია.



ნახ. 201

ბირთვული ზედაპირის რაიმე წერტილზე გამავალ წრფეს, რომელიც ამ წერტილზე გამავალი რადიუსის მართობულია, მხები ეწოდება. მტკიცდება, რომ ბირთვული ზედაპირის ნებისმიერ წერტილზე, გადის მხებთა უსასრულო სიმრავლე და თითოეული მათგანი ბირთვის მხებ სიბრტყეში ძვეს.

შვედაგინოთ სფეროს განტოლება. ვთქვათ R რადიუსიანი სფეროს ცენტრი $O(a, b, c)$ წერტილში მდებარეობს. რადგან სფეროს ნებისმიერი (x, y, z) წერტილიდან მის ცენტრამდე მანძილი R -ის ტოლია, ამიტომ ორ წერტილს შორის მანძილის ფორმულის თანახმად გვქმნება:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

თუ სფეროს ცენტრი კოორდინატთა სათავეს ემთხვევა, მაშინ სფეროს განტოლება მიიღებს სახეს:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

მტკიცდება, რომ ორი სფეროს გადაკვეთის წირი წრეწირს წარმოადგენს.

სფეროს ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = 4\pi R^2.$$

§34. სხეულის მოცულობა

ავიღოთ ორი ჭურჭელი: ერთი კუბის ფორმის, ხოლო მეორე ნებისმიერი ფორმის. ვთქვათ, ორივე ჭურჭელი საცხეა სითხით. დავეუშვათ, რომ პირველ ჭურჭელში ჩავიღა m კგ სითხე, ხოლო მეორეში – n კგ. ბუნებრივია ჩავთვალოთ, რომ მეორე ჭურჭელი

$\frac{n}{m}$ -ჯერ მეტია პირველზე. რიცხვს, რომელიც გვჩვენებს, თუ რამდენჯერ მეტია მეორე ჭურჭელი პირველზე, ეწოდოთ მეორე ჭურჭლის მოცულობა. პირველი ჭურჭელი აქ საზომი ერთეულია. ამ აზრით ერთმანეთს შეიძლება შევადაროთ კუბი და ნებისმიერი სხეული, სადაც კუბი საზომი ერთეულია.

მოცულობის ცნების ამ განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს მოცულობის შემდეგი თვისებები:

1. ყოველ სხეულს აქვს გარკვეული მოცულობა.
 2. ტოლ სხეულებს ტოლი მოცულობები აქვთ (ტოლი მოცულობების მქონე ფიგურებს ტოლდები ეწოდებათ).
 3. თუ სხეულს ორ ნაწილად გავყოფთ, მაშინ ამ ნაწილების მოცულობათა ჯამი მოცემული სხეულის მოცულობის ტოლია.
- ქვემოთ ჩვენ გამოვიყვანოთ სხვადასხვა სხეულების მოცულობის გამოსათვლელ ფორმულებს.

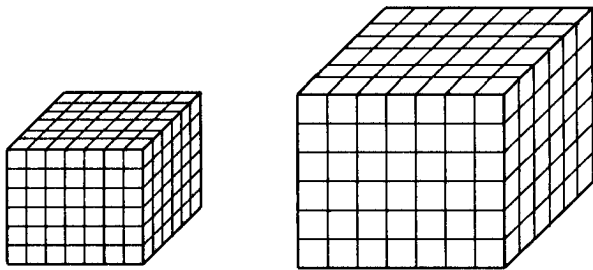
I. მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობა

ვიპოვოთ მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობა. 202-ე ნახაზზე გამოსახულია კუბი, რომელიც მოცულობის საზომ ერთეულს წარმოადგენს და მართკუთხა პარალელებიპედი, რომლის მოცულობაც უნდა ვიპოვოთ.

ვასვენოთ, რომ, თუ მართკუთხა პარალელებიპედის განზომილებებია a , b და c , მაშინ მისი V მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V=abc.$$

ჯერ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა პარალელებიპედის a , b და c წიბოების სიგრძეები გამოისახება სასრული ათწილადებით და მძიმის შემდეგ ათობითი ნიშნების რაოდენობა n -ს არ აღემატება.



ნახ. 202

კუბის ერთი წვეროდან გამოშავალი წიბოები დავეთ 10ⁿ ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებზე გავავლოთ ამ წიბოების მართობული სიბრტყეები. კუბი დაიყოფა

$10'' \cdot 10'' \cdot 10'' = 10^{3''}$ რაოდენობის მცირე კუბებად, რომელთა წიბოები $\frac{1}{10''}$ -ის ტოლია.

ვიპოვოთ მცირე კუბის მოცულობა. მოცულობის თვისების თანახმად დიდი კუბის მოცულობა მცირე კუბების მოცულობათა ჯამის ტოლია. რადგან დიდი კუბის მოცულობა ერთის ტოლია, ხოლო მცირე კუბების რაოდენობა $10^{3''}$ -ია, ამიტომ მცირე კუბის მოცულობა $\frac{1}{10^{3''}}$ -ის ტოლია.

რადგან

$$\frac{a}{10''} = a \cdot 10'', \quad \frac{b}{10''} = b \cdot 10'', \quad \frac{c}{10''} = c \cdot 10''.$$

რიცხვები მთელია, ამიტომ პარალელეპიპედის წიბოები შეგვიძლია დავუთ $\frac{1}{10''}$ -ის ტოლ ნაწილებად, რომელთა რაოდენობა

მთელი რიცხვით გამოისახება. a წიბოზე მათი რაოდენობა $a \cdot 10''$ იქნება, b წიბოზე $b \cdot 10''$, ხოლო c წიბოზე $c \cdot 10''$. წიბოს დაყოფის წერტილებზე გავავლოთ ამ წიბოს მართობული სიბრტყეები. ამით პარალელეპიპედი დაიყოფა მცირე კუბებად, რომელთა გვერდები $\frac{1}{10''}$ -ის ტოლია. მათი რაოდენობაა

$a \cdot 10'' \cdot b \cdot 10'' \cdot c \cdot 10'' = abc \cdot 10^{3''}$. პარალელეპიპედის მოცულობა მასში მოთავსებული მცირე კუბების მოცულობათა ჯამის ტოლია.

რადგან მცირე კუბის მოცულობა $\frac{1}{10^{3''}}$ -ის ტოლია, ხოლო ასეთი კუბების რაოდენობაა $abc \cdot 10^{3''}$, ამიტომ ამ შემთხვევაში პარალელეპიპედის მოცულობის გამოსათვლელად მივიღებთ:

$$abc \cdot 10^{3''} \cdot \frac{1}{10^{3''}} = abc.$$

ახლა განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა a , b , c წიბოებიდან თუნდაც ერთის სიგრძე უსასრულო ათწილადით გამოისახება. აღვნიშნოთ a_1 -ით და a_2 -ით a რიცხვის მიახლოებითი მნიშვნელობები ნაკლებობით და მეტობით n ათობით ნიშნამდე სიზუსტით. b და c რიცხვების მიახლოებითი მნიშვნელობები იმავე სიზუსტით აღვნიშნოთ b_1 -ით და b_2 -ით, c_1 -ით და c_2 -ით. იმ პარალელეპიპედის მოცულობა, რომლის წიბოებია a_1 , b_1 და c_1 , ნაკლებია მოცემული პარალელეპიპედის მოცულობაზე, რადგან მისი მოთავსება შეიძლება მოცემულის შიგნით. იმ

პარალელეპიპედის მოცულობა, რომლის წიბოებია a_2 , b_2 და c_2 , მეტია მოცემული პარალელეპიპედის მოცულობაზე, რადგან მასში შეიძლება მოცემული პარალელეპიპედის მოთავსება. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად a_1 , b_1 , c_1 , წიბოების მქონე პარალელეპიპედის მოცულობა $a_1b_1c_1$ -ის ტოლია, ხოლო a_2 , b_2 , c_2 წიბოების მქონე პარალელეპიპედის მოცულობა $a_2b_2c_2$ -ის ტოლია. ამრიგად, მოცემული პარალელეპიპედის მოცულობა მოთავსებულია $a_1b_1c_1$ -სა და $a_2b_2c_2$ -ს შორის. რადგან, როცა n საკმარისად დიდია, $a_1b_1c_1$ და $a_2b_2c_2$ გვაძლევენ abc რიცხვის მიახლოებით მნიშვნელობას ნებისმიერი წინასწარ მოცემული სიზუსტით, ამიტომ

$$V=a \cdot b \cdot c.$$

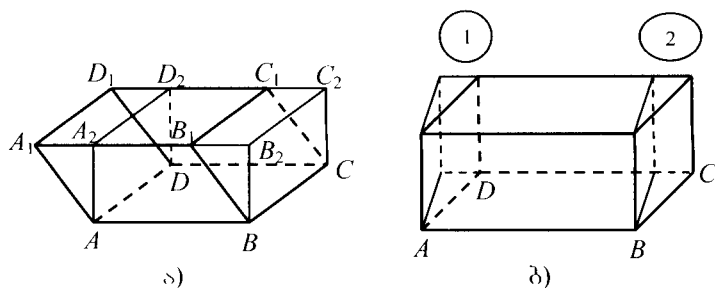
ამრიგად, მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა მისი განზომილებების ნამრავლის ტოლია.

რადგან მართკუთხა პარალელეპიპედის ორი განზომილების ნამრავლი ფუძის ფართობია, ხოლო მესამე – სიმაღლეა, ამიტომ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

II. დახრილი პარალელეპიპედის მოცულობა

თეორემა 34.1. ნებისმიერი პარალელეპიპედის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და ამ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ვთქვათ $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ მოცემული დახრილი პარალელეპიპედი (ნახ. 203,ა). BC წიბოზე გაავლოთ $ABCD$ ფუძის მართობული სიბრტყე და მოცემულ პარალელეპიპედს მივაშენოთ სამკუთხა $BB_1 B_2 C C_1 C_2$ პრიზმა. ახლა AD წიბოზე გამავალი და $ABCD$ ფუძის მართობული სიბრტყით მიღებულ სხეულს წამოვკვეთოთ სამკუთხა პრიზმა. კვლავ მივიღებთ პარალელეპიპედს. ამ პარალელეპიპედის მოცულობა თავდაპირველი პარალელეპიპედის მოცულობის ტოლია, რადგან წამოკვეთილი და მიშენებული სამკუთხა პრიზმები ტოლია. მართლაც, AB მონაკვეთზე პარალელური გადატანისას ეს პრიზმები ერთმანეთს შეუთავსდება, მაშასადამე, მათ ერთნაირი მოცულობები აქვთ.



ნახ. 203

პარალელეპიპედის აღწერილი გარდაქმნისას მისი სიმაღლე და ფუძის ფართობი არ იცვლება. არ იცვლება აგრეთვე ორი გვერდითი წახნაგის სიბრტყეები, ორი სხვა სიბრტყე კი ფუძის მართობული ხდება. თუ დანარჩენი დახრილი გვერდითი წახნაგების მიმართ კიდევ ერთხელ გამოვიყენებთ ასეთ გარდაქმნას, მივიღებთ პარალელეპიპედს, რომლის ყველა გვერდითი წახნაგი ფუძის მართობულია, ე. ი. მართ პარალელეპიპედს. მიღებული მართი პარალელეპიპედი ანელოგიური ხერხით გარდაქმნათ მართკუთხა პარალელეპიპედად, რისთვისაც ჯერ მას მივაშენოთ პრიზმა 1, შემდეგ ჩამოვკვეთოთ პრიზმა 2 (ნახ. 203,ბ), ეს გარდაქმნაც აგრეთვე არ ცვლის პარალელეპიპედის მოცულობას, სიმაღლესა და ფუძის ფართობს.

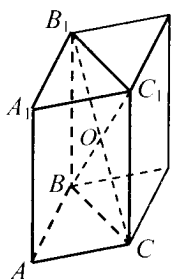
ამრიგად, რადგან მოცემული პარალელეპიპედის მართკუთხა პარალელეპიპედად ზემოთ აღწერილი ხერხით გარდაქმნისას არ იცვლება მოცულობა, სიმაღლე და ფუძის ფართობი, ამიტომ თავდაპირველი პარალელეპიპედის მოცულობაც ფუძის ფართობისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. თეორემა დამტკიცებულია.

III. პრიზმისა და პირამიდის მოცულობა

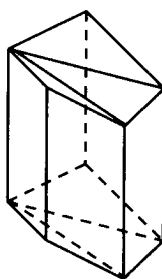
თეორემა 34.2. ნებისმიერი პრიზმის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.

დამტკიცება. ჯერ განვიხილოთ სამკუთხა პრიზმა (ნახ. 204). შევაგოსოთ იგი პარალელეპიპედამდე, როგორც ეს ნახაზზეა ნაჩვენები. O წერტილი მიღებული პარალელეპიპედის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია, ამიტომ იგი წარმოადგენს ამ პარალელეპიპედის სიმეტრიის ცენტრს. ამრიგად, მიშენებული პრიზმა თავდაპირველის სიმეტრიულია O წერტილის მიმართ და ამიტომ აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა მოცემული პრიზმის გაორგვებული მოცულობის ტოლია.

პარალელეპიპედის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია. პარალელეპიპედის ფუძის ფართობი ABC სამკუთხედის გაორკეცებული ფართობის ტოლია, ხოლო მისი სიმაღლე მოცემული პრიზმის სიმაღლის ტოლია. აქედან დავასკვნით, რომ მოცემული პრიზმის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.



ნახ. 204



ნახ. 205

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი პრიზმა (ნახ. 205). პრიზმის რომელიმე გვერდით წიბოსა და მის არამეზობელ ყოველ გვერდით წიბოზე გავავლოთ სიბრტყეები, როგორც ეს 205-ე ნახაზზეა ნაჩვენები. ასეთნაირად პრიზმა დაიყოფა სამკუთხა პრიზმებად, რომელთა ფუძეები მოცემული პრიზმის ფუძეს შეადგენენ, ხოლო სიმაღლეები მოცემული პრიზმის სიმაღლის ტოლია.

მოცემული პრიზმის მოცულობა მისი შემადგენელი სამკუთხა პრიზმების მოცულობათა ჯამის ტოლია. ზემოთ დამტკიცებულის თანახმად სამკუთხა პრიზმის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია, ამიტომ მოცემული პრიზმის მოცულობა

$$V = S_1H + S_2H + \dots + S_nH = (S_1 + S_2 + \dots + S_n)H,$$

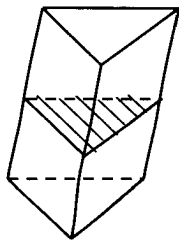
სადაც $S_1, S_2, \dots, S_n$ არის იმ სამკუთხედების ფართობები, რომლებიც მოცემული პრიზმის ფუძეს შეადგენენ, H – პრიზმის სიმაღლეა. ფუძის შემადგენელი სამკუთხედების ფართობთა ჯამი მოცემული პრიზმის ფუძის S ფართობის ტოლია, ამიტომ

$$V = SH.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 34.3. ნებისმიერი პრიზმის მოცულობა მისი პერპენდიკულარული კვეთის Q ფართობისა და l გვერდითი წიბოს ნამრავლის ტოლია (ნახ. 206).

დაუმტკიცებლად მოვიყვანოთ შემდეგი თეორემა.



ნახ. 206

თეორემა 34.4. პირამიდის მოცულობა მისი ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ერთი მესამედის ტოლია, ე. ი.

$$V = \frac{1}{3} QH,$$

ხადაც Q პირამიდის ფუძის ფართობია, ხოლო H — სიმაღლე.

IV. ცილინდრის, კონუსის და ბირთვის მოცულობა

ვთქვათ მოცემულია ცილინდრი, რომლის სიმაღლეა H , ხოლო ფუძის რადიუსი R . ცილინდრის V მოცულობა მეტია მასში ჩახაზულ წესიერი n -კუთხა პრიზმის $V_1 = Q_1 H$ მოცულობაზე (ნახ. 193) და ნაკლებია შემოხაზული წესიერი n -კუთხა პრიზმის $V_2 = Q_2 H$ მოცულობაზე (ნახ. 194). აქ Q_1 და Q_2 შესაბამისად ფუძეში ჩახაზული და ფუძეზე შემოხაზული წესიერი n -კუთხედის ფართობებია. როგორც ვიცით, საკმარისად დიდი n -ისათვის Q_1 და Q_2 რაგინდ მცირედ განსხვავდება ცილინდრის ფუძის $S = \pi R^2$ ფართობისაგან (იხ. §22). შესაბამისად, V_1 და V_2 რაგინდ მცირედ განსხვავდება $\pi R^2 H$ -ისაგან. ვინაიდან V მოთავსებულია V_1 -სა და V_2 -ს შორის, ამიტომ შეიძლება ვივარაუდოთ, რომ ცილინდრის მოცულობა

$$V = \pi R^2 H.$$

შეგნიშნოთ, რომ ეს ვარაუდი სწორია. მისი დამტკიცება უმაღლესი მათემატიკის სფეროს განეკუთვნება.

ვთქვათ მოცემულია კონუსი, რომლის სიმაღლეა H , ხოლო ფუძის რადიუსი R . კონუსის მოცულობა მეტია მასში ჩახაზული წესიერი n -კუთხა პირამიდის მოცულობაზე (ნახ. 197) და ნაკლებია შემოხაზული წესიერი n -კუთხა პირამიდის მოცულობაზე (ნახ. 198). თუ ჩავატარებთ იმის ანალოგიურ მსჯელობას, რაც გვქონდა ცილინდრის შემთხვევაში, დავასკვნით, რომ კონუსის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

R რადიუსიანი ბირთვის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

ამოცანათა კრებული

პლანიმეტრია

§1. პლანიმეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები

1.1. M წერტილი C და D წერტილებს შორის მდებარეობს. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე, თუ: 1) $CM=2,5$ სმ, $MD=3,5$ სმ; 2) $CM=12,3$ მ, $MD=5,8$ მ.

1.2. AB ხსოვზე მონიშნულია C წერტილი. იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე, თუ: 1) $AB=1,5$ მ, $AC=0,3$ მ; 2) $AB=2$ სმ, $AC=4,4$ სმ.

1.3. 15 მ სიგრძის AB მონაკვეთზე აღნიშნულია C წერტილი. იპოვეთ AC და BC მონაკვეთების სიგრძეები, თუ: 1) AC მონაკვეთი BC მონაკვეთზე 3 მ-ით გრძელია, 2) AC მონაკვეთი BC მონაკვეთზე ორჯერ გრძელია, 3) C წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია, 4) AC და BC მონაკვეთების სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 2:3.

1.4. წრფეზე აღებულია სამი მონაკვეთი $AB=20$ სმ, $AC=5,1$ სმ, $CD=7,9$ სმ. ამასთან C და D წერტილები მდებარეობს A და B წერტილებს შორის. იპოვეთ BD მონაკვეთის სიგრძე.

1.5. წრფეზე აღებულია სამი მონაკვეთი $AB=3$ სმ, $BC=5$ სმ, $CD=4$ სმ. ამასთან B წერტილი მდებარეობს A და C წერტილებს შორის, ხოლო C წერტილი B და D წერტილებს შორის. იპოვეთ მანძილი AB და CD მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

1.6. წრფეზე აღებულია $AB=60$ სმ და $AC=100$ სმ მონაკვეთები, ამასთან B და C წერტილები A წერტილიდან ერთ მხარეს მდებარეობს. იპოვეთ: 1) BC მონაკვეთის სიგრძე; 2) მანძილი A წერტილიდან BC მონაკვეთის შუაწერტილამდე; 3) მანძილი AB და AC მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

1.7. წრფეზე აღებულია $AB=6$ სმ და $AC=5$ სმ მონაკვეთები, ამასთან A წერტილი მდებარეობს B და C წერტილებს შორის. იპოვეთ: 1) BC მონაკვეთის სიგრძე; 2) მანძილი A წერტილიდან BC მონაკვეთის შუაწერტილამდე; 3) მანძილი AC და BC მონაკვეთების შუაწერტილებს შორის.

1.8. A , B , C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს. იპოვეთ BC მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AB=2,7$ მ, $AC=3,2$ მ.

1.9. A , B , C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს. ცნობილია, რომ $AB=4,3$ სმ, $AC=7,5$ სმ, $BC=3,2$ სმ. A , B , C წერტილებიდან რომელი მდებარეობს დანარჩენ ორს შორის?

1.10. A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს. ეკუთვნის თუ არა B წერტილი AC მონაკვეთს, თუ: 1) $AC=5$ სმ, $BC=7$ სმ; 2) $AC=9,1$ მ, $AB=9,2$ მ; 3) $AB=3$ დმ, $BC=4$ დმ, $AC=7$ დმ?

1.11. A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს. შეიძლება თუ არა, რომ B წერტილი მდებარეობდეს A და C წერტილების შორის, თუ: 1) $AC=5$ სმ, $AB=7$ სმ; 2) $AC=7$ მ, $BC=7,6$ მ?

1.12. შეიძლება თუ არა, რომ A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობდეს, თუ $AB=1,8$ მ, $AC=1,3$ მ, $BC=3$ მ?

1.13. A წერტილიდან B და C წერტილებამდე მანძილები 5 სმ-ს და 7 სმ-ს უდრის, B და C წერტილებს შორის მანძილი კი 6 სმ-ია. შეიძლება თუ არა, რომ A, B და C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობდეს?

1.14. შეიძლება თუ არა, რომ A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობდეს, თუ დიდი AB მონაკვეთის სიგრძე AC და BC მონაკვეთების სიგრძეების ჯამზე ნაკლებია.

1.15. მოცემულია ოთხი წერტილი: A, B, C და D . ცნობილია, რომ A, B, C წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს და B, C, D წერტილებიც, აგრეთვე, ერთ წრფეზე მდებარეობს. დაამტკიცეთ, რომ ოთხივე წერტილი ერთ წრფეზე მდებარეობს.

1.16. მოცემულია ოთხი წრფე: a, b, c და d . ცნობილია, რომ a, b, c წრფეები, ერთ წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს და b, c, d წრფეებიც, აგრეთვე ერთ წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს. დაამტკიცეთ, რომ ოთხივე წრფე ერთ წერტილზე გადის.

1.17. AB სხივი გადის CAD კუთხის გვერდებს შორის. იპოვეთ $\angle CAD$, თუ: 1) $\angle CAB=35^\circ$, $\angle DAB=75^\circ$; 2) $\angle CAB=94^\circ$, $\angle DAB=85^\circ$.

1.18. AB სხივი 60° -ის ტოლი CAD კუთხის გვერდებს შორის გადის. იპოვეთ CAB და DAB კუთხეები, თუ: 1) CAB კუთხე DAB კუთხეზე 30° -ით მეტია; 2) CAB კუთხე DAB კუთხეზე ორჯერ მეტია; 3) AB სხივი CAD კუთხეს შუაზე ყოფს; 4) CAB და DAB კუთხეების გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3.

§2. კუთხეები

2.1. იპოვეთ შემდეგი კუთხეების მოსახლდრე კუთხეები: 1) 30° , 2) 45° , 3) 60° , 4) 90° .

2.2. შეიძლება თუ არა ორივე მოსახლდრე კუთხე იყოს: 1) მახვილი, 2) ბლაგვი, 3) მართი? პასუხი დაასაბუთეთ.

2.3. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ ერთი მათგანი ორჯერ მეტია მეორეზე.

2.4. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ: 1) ერთი მათგანი 30° -ით მეტია მეორეზე, 2) მათი სხვაობა 40° -ს უდრის, 3) ერთი მათგანი სამჯერ ნაკლებია მეორეზე.

2.5. იპოვეთ მოსაზღვრე კუთხეები, თუ მათი გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1) 2:3; 2) 3:7.

2.6. ორი წრვის გადაკვეთისას მიღებული კუთხეებიდან ერთი 30° -ის ტოლია. რას უდრის დანარჩენი კუთხეები?

2.7. იპოვეთ კუთხე, რომელიც თავისი მოსაზღვრე კუთხის $\frac{3}{7}$ -ს უდრის.

2.8. რას უდრის კუთხე, თუ მისი მოსაზღვრე ორი კუთხის ჯამი 100° -ს შეადგენს?

2.9. ორი წრვის გადაკვეთისას მიღებული ორი კუთხის ჯამი 50° -ს უდრის. იპოვეთ ეს კუთხეები.

2.10. ორი წრვის გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხე ოთხჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ ეს კუთხეები.

2.11. ორი წრვის გადაკვეთისას მიღებული ერთი კუთხე 50° -ით ნაკლებია მეორეზე. იპოვეთ ეს კუთხეები.

2.12. იპოვეთ კუთხეები, რომლებიც ორი წრვის გადაკვეთისას მიიღება, თუ სამი მათგანის ჯამი 270° -ს უდრის.

2.13. რას უდრის მოცემული კუთხის ბისექტრისასა და გვერდს შორის კუთხე, თუ მოცემული კუთხე ტოლია: 1) 30° -ის, 2) 52° -ის, 3) 172° -ის?

2.14. იპოვეთ კუთხე, თუ მისი ბისექტრისა გვერდთან ადგენს კუთხეს, რომელიც ტოლია: 1) 60° -ის, 2) 75° -ის, 3) 89° -ის.

2.15. იპოვეთ მოცემული კუთხის ბისექტრისასა და მისი ერთ-ერთი გვერდის გაგრძელებას შორის კუთხე, თუ მოცემული კუთხე უდრის 1) 50° -ს, 2) 90° -ს, 3) 150° -ს.

2.16. OC სხივი გადის 160° -იანი AOB კუთხის გვერდებს შორის. OA გვერდის პერპენდიკულარული OD სხივი COB კუთხის ბისექტრისას წარმოადგენს. იპოვეთ AOC და COB კუთხეები.

2.17. ABC და CBD კუთხეები მოსაზღვრეა. $\angle CBD = 40^\circ$. B წვეროდან გავლებულია ABC კუთხის ბისექტრისა და AB წრვის პერპენდიკულარული წრფე. იპოვეთ კუთხე ამ ბისექტრისასა და პერპენდიკულარულ წრფეს შორის.

2.18. იპოვეთ კუთხე მოსაზღვრე კუთხეების ბისექტრისებს შორის.

§3. სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. ტოლფერდა სამკუთხედი

ამოცანები გამოთვლაზე

3.1. AB და CD მონაკვეთები ერთმანეთს გადაკვეთს O წერტილში, რომელიც თითოეული მათგანის შუაწერტილია. რას უდრის BD მონაკვეთი, თუ AC მონაკვეთი 10 მ-ის ტოლია?

3.2. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი (გვერდების სიგრძეთა ჯამი) 1 მ-ის ტოლია, ხოლო ფუძეა 0,4 მ. იპოვეთ ფერდის სიგრძე.

3.3. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 7,5 მ-ის ტოლია, ხოლო ფერდი – 2 მ-ის. იპოვეთ ფუძე.

3.4. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 15,6 მ-ის ტოლია. იპოვეთ მისი გვერდები, თუ: 1) ფუძე ფერდზე 3 მ-ით ნაკლებია; 2) ფუძე ფერდზე 3 მ-ით მეტია.

3.5. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდზე აგებულია ტოლგვერდა სამკუთხედი; ტოლგვერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 45 სმ-ია, ტოლფერდა სამკუთხედისა კი – 40 სმ. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფუძე.

3.6. ტოლფერდა სამკუთხედის მედიანა პერიმეტრს ყოფს 12 სმ-ისა და 9 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

3.7. ტოლფერდა სამკუთხედის მედიანა ყოფს ამ სამკუთხედის პერიმეტრს ნაწილებად: 15 სმ და 6 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

3.8. ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროზე, რომლის ფუძე და ფერდი შესაბამისად 10 სმ და 13 სმ-ია, გავლებულია მედიანა. იპოვეთ მედიანის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ მედიანით შექმნილი ერთ-ერთი სამკუთხედის პერიმეტრი 30 სმ-ია.

3.9. ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულია D წერტილი. იპოვეთ CD მონაკვეთის სიგრძე, თუ ABC , ACD და BCD სამკუთხედების პერიმეტრები შესაბამისად 50 მ-ს, 45 მ-ს და 35 მ-ს უდრის.

3.10. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC , გავლებულია BD მედიანა. იპოვეთ მისი სიგრძე, თუ ABC სამკუთხედის პერიმეტრი 50 მ-ია, ხოლო ABD სამკუთხედისა – 40 მ.

3.11. ABC სამკუთხედის BC გვერდზე აღებულია D წერტილი ისე, რომ $\angle CAD = \angle ACD$; ABC და ABD სამკუთხედების პერიმეტრები შესაბამისად 37 სმ და 24 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ AC გვერდი.

3.12. ABC სამკუთხედში $\angle A=38^\circ$, $\angle B=110^\circ$, $\angle C=32^\circ$. AC გვერდზე აღებულია D და E წერტილები ისე, რომ $BD=AD$ და $BE=EC$. იპოვეთ DBE კუთხე.

3.13. ABC სამკუთხედის AD მედიანის გაგრძელებაზე გადაღებულია ამ მედიანის ტოლი DE მონაკვეთი და E წერტილი შეერთებულია C წერტილთან. იპოვეთ ACE კუთხე, თუ $\angle ACD=56^\circ$, $\angle ABD=40^\circ$.

3.14. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში AB ფერდი 14 სმ-ია. მისი D შუაწერტილიდან ამ ფერდისადმი გავლებული პერპენდიკულარული წრფე BC ფერდს კვეთს E წერტილში. E წერტილი შეერთებულია A -სთან. AEC სამკუთხედის პერიმეტრი 24 სმ-ია. იპოვეთ AC -ს სიგრძე.

3.15. ABC სამკუთხედში $AB=BC=14$ სმ. AB ფერდის D შუაწერტილზე გავლებული პერპენდიკულარი სამკუთხედის ფუძეს კვეთს E წერტილში. E წერტილი შეერთებულია B წერტილთან. იპოვეთ ABC სამკუთხედის AC ფუძე, თუ BEC სამკუთხედის პერიმეტრი 40 სმ-ია.

3.16. ABC სამკუთხედის BM ბისექტრისა CN მედიანის მართობულია. იპოვეთ AB და BC გვერდები, თუ $AC=10$ სმ, ხოლო სამკუთხედის პერიმეტრი 31 სმ-ია.

ამოცანები დამტკიცებაზე

3.17. ტოლფერდა ABC სამკუთხედის ფუძეა AB . C წვეროდან გადაღებულია ტოლი მონაკვეთები: CA გვერდზე – CA_1 და CB გვერდზე – CB_1 . დაამტკიცეთ, რომ ტოლია სამკუთხედები: 1) CAB_1 და CBA_1 , 2) ABB_1 და BAA_1 .

3.18. ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულია D წერტილი, ხოლო $A_1B_1C_1$ სამკუთხედის A_1B_1 გვერდზე – D_1 წერტილი. ცნობილია, რომ ADC და $A_1D_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია და $DB=D_1B_1$. დაამტკიცეთ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედების ტოლობა.

3.19. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები აგრეთვე ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროებია.

3.20. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის თითოეულ გვერდზე გადაღებულია ტოლი მონაკვეთები $AB_1=BC_1=CA_1$. დაამტკიცეთ, რომ $A_1B_1C_1$ სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

3.21. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა კუთხის, ამ კუთხის ბისექტრისისა და ამ კუთხის მიმდებარე გვერდის მიხედვით.

3.22. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა ორი გვერდისა და ერთ-ერთი მათგანისადმი გავლებული მედიანის მიხედვით.

3.23. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა ერთი წვეროდან გამოსული ორი გვერდის და მედიანის მიხედვით.

3.24. დაამტკიცეთ სამკუთხედების ტოლობა მედიანისა და იმ კუთხეების მიხედვით, რა კუთხეებადაც მედიანა სამკუთხედის კუთხეს გაყოფს.

3.25. AB და CD მონაკვეთები ერთმანეთს გადაკვეთს. დაამტკიცეთ, რომ თუ $AD=AC$ და $BD=BC$, მაშინ AB სხივი CAD კუთხის ბისექტრისაა, ხოლო AB და CD ურთიერთმართობულია.

3.26. ტოლი სიგრძის AB და CD მონაკვეთები O წერტილში გადაიკვეთება ისე, რომ $AO=OD$. დაამტკიცეთ, რომ ABC და DCB სამკუთხედები ტოლია.

§4. წრფეთა პარალელობა. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი.

მონაკვეთის შუამართობი

ამოცანები გამოთვლაზე

4.1. ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთს შორის ორი შიგა ცალმხრივი კუთხის სხვაობა 30° -ს უდრის. იპოვეთ ეს კუთხეები.

4.2. ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთს შორის ორი შიგა ჯვარედინი კუთხის ჯამი 150° -ს უდრის. რას უდრის ეს კუთხეები?

4.3. ორი პარალელური წრფის მესამეთი გადაკვეთისას მიღებული ერთ-ერთი კუთხე 72° -ს უდრის. იპოვეთ დანარჩენი შვიდი კუთხე.

4.4. ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთს შორის ერთ-ერთი შიგა კუთხე 130° -ია. იპოვეთ ამ კუთხის ბისექტრისასა და მეორე პარალელურ წრფეს შორის კუთხეები.

4.5. მოცემულია ორი კუთხე, რომელთა გვერდები პარალელურ წრფეებზე მდებარეობს. იპოვეთ ეს კუთხეები, თუ ერთი მათგანი 90° -ით მეტია მეორეზე.

4.6. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე კუთხე, თუ მისი ორი კუთხეა: 1) 50° და 30° ; 2) 40° და 75° ; 3) 25° და 120° .

4.7. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ისინი შემდეგი რიცხვების პროპორციულია: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5.

4.8. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდებს შორის კუთხე, თუ ფუძესთან მდებარე კუთხეა: 1) 40° ; 2) 55° ; 3) 72° .

4.9. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე, თუ ფერდებს შორის კუთხეა: 1) 80° ; 2) 120° ; 3) 30° .

4.10. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 70° -ს უდრის. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

4.11. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი კუთხე 100° -ს უდრის. იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

4.12. ტოლფერდა სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხე უდრის 30° -ს. მის ფერდზე დაშვებულია სიმაღლე. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ეს სიმაღლე ფუძესთან შეადგენს.

4.13. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხე უდრის 30° -ს. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ერთი ფერდი მეორე ფერდზე დაშვებულ სიმაღლესთან შეადგენს.

4.14. მოცემულია 48° -ის ტოლი კუთხე. წერტილზე, რომელიც კუთხის გვერდებზე არ მდებარეობს, გავლებულია კუთხის ერთი გვერდის პარალელური და მეორე გვერდის პერპენდიკულარული წრფეები. იპოვეთ ამ წრფეებით შედგენილი კუთხეებიდან უმცირესი.

4.15. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებულ სიმაღლესა და ფერდს შორის კუთხე 20° -ით ნაკლებია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.16. ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდის სიმაღლესა და მეორე ფერდს შორის კუთხე 24° -ით ნაკლებია ფუძესთან მდებარე კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები. განიხილეთ ორი შემთხვევა.

4.17. მართკუთხა სამკუთხედში ერთი მახვილი კუთხე უდრის 45° -ს. იპოვეთ კათეტები, თუ მათი ჯამი 36 სმ-ს უდრის.

4.18. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხე უდრის 45° -ს. იპოვეთ ჰიპოტენუზა, თუ ჰიპოტენუზისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ჯამი 12 სმ-ის ტოლია.

4.19. ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე კუთხის ბისექტრისა მის გვერდთან ადგენს 60° -იან კუთხეს. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე, თუ მისი ფერდი 25 სმ-ის ტოლია.

4.20. წრფიდან 10 სმ მანძილზე აღებული წერტილიდან ამ წრფისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეების შეფარდებაა 1:2. უმცირესი დახრილი წრფესთან ადგენს 30° -იან კუთხეს. იპოვეთ დახრილების სიგრძეები.

4.21. მართკუთხა სამკუთხედში ერთი მახვილი კუთხე უდრის 60° -ს. ჰიპოტენუზისა და მცირე კათეტის ჯამი 1,8 მ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

4.22. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი მახვილი კუთხე უდრის 30° -ს. იპოვეთ მახვილი კუთხე Δ პოტენუზასა და მართი კუთხის ბისექტრისას შორის.

4.23. ორი პარალელური წრფის მკვეთი წრფე ერთ-ერთთან ადგენს 150° -იან კუთხეს. იპოვეთ ამ პარალელურ წრფეებს შორის მოთავსებული მკვეთის მონაკვეთის სიგრძე, თუ პარალელურ წრფეებს შორის მანძილი 46 მმ-ია.

4.24. ტოლფერდა სამკუთხედის შიგა კუთხეებისა და ერთ-ერთი გარე კუთხის ჯამი უდრის 210° -ს. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.25. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC , გაკლებულია CD ბისექტრისა. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ADC კუთხე უდრის 1) 60° -ს; 2) 75° -ს; 3) α -ს.

4.26. 108° -ის ტოლი ABC კუთხის წვეროზე გაკლებულია მისი ბისექტრისის პერპენდიკულარული MN წრფე. იპოვეთ MN წრფითა და ABC კუთხის გვერდებით შეღგენილი კუთხეები.

4.27. ABC სამკუთხედში A და B წვეროებიდან გაკლებულია ბისექტრისები. მათი გადაკვეთის წერტილია D . იპოვეთ ADB კუთხე, თუ 1) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 100^\circ$; 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; 3) $\angle C = \gamma$.

4.28. მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან გაკლებულ სიმაღლესა და ბისექტრისას შორის კუთხე არის 15° . იპოვეთ სამკუთხედის დიდი მახვილი კუთხე.

4.29. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხე 25° -ის ტოლია. მართი კუთხის წვეროდან გაკლებულია სიმაღლე და ბისექტრისა. იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

4.30. მართკუთხა სამკუთხედში მართი კუთხის წვეროდან გაკლებული მედიანა და ბისექტრისა 10° -იან კუთხეს ადგენენ. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.31. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხე 50° -ის ტოლია. მართი კუთხის წვეროდან გაკლებულია სიმაღლე და მედიანა. იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

4.32. მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან გაკლებულია მედიანა, ბისექტრისა და სიმაღლე. მედიანასა და ბისექტრისას შორის კუთხეა 40° . იპოვეთ კუთხე მედიანასა და სიმაღლეს შორის.

4.33. მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან გაკლებულია მედიანა, ბისექტრისა და სიმაღლე. მედიანასა და სიმაღლეს შორის კუთხეა 30° . იპოვეთ კუთხე ბისექტრისას და სიმაღლეს შორის.

4.34. ABC სამკუთხედში A და C კუთხეების ბისექტრისები M წერტილში იკვეთება. იპოვეთ ABC კუთხე, თუ ის AMC კუთხის ნახევარს უდრის.

4.35. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხის წვეროვთან მდებარე გარე კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთით მიღებული უმცირესი კუთხე.

4.36. ტოლფერდა სამკუთხედის ერთ-ერთი გარე კუთხე 70° -ს უდრის. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.37. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ მის ორ წვეროსთან მდებარე გარე კუთხეები 120° -ს და 150° -ს უდრის.

4.38. სამკუთხედის ორი გარე კუთხე 100° -ს და 150° -ს უდრის. იპოვეთ მესამე გარე კუთხე.

4.39. ABC სამკუთხედში B წვეროსთან მდებარე გარე კუთხე 3-ჯერ მეტია A კუთხეზე და 40° -ით მეტი C კუთხეზე. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

4.40. ABC სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან გავლუბულია BD სიმაღლე. იპოვეთ CBD კუთხე, თუ ცნობილია, რომ $\angle A = \alpha$.

4.41. ABC სამკუთხედის A და B წვეროსთან თითო-თითოდ აღებული გარე კუთხეების ჯამი 240° -ს უდრის. რას უდრის სამკუთხედის C კუთხე?

4.42. სამკუთხედის ერთ-ერთი შიგა კუთხე 30° -ს უდრის, ხოლო ერთ-ერთი გარე კუთხე -40° -ს. იპოვეთ დანარჩენი შიგა კუთხეები.

4.43. ABC სამკუთხედში BD მედიანა AC გვერდის ნახევარს უდრის. იპოვეთ სამკუთხედის B კუთხე.

4.44. მოცემულია ორი კუთხე. ერთი კუთხის გვერდები მეორე კუთხის გვერდების შემცველი წრფეების პერპენდიკულარულ წრფეებზე მდებარეობს. ერთი კუთხე 4-ჯერ ნაკლებია მეორეზე. იპოვეთ თითოეული კუთხის სიდიდე.

4.45. ABC სამკუთხედში გავლუბებულია AD და CE სიმაღლეები; M არის მათი გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ $\angle AMC$, თუ მოცემულია $\angle BAC = 25^\circ$ და $\angle BCA = 75^\circ$.

4.46. ABC ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდებზე დაშვებული AD და CE სიმაღლეები ქმნიან AMC კუთხეს, რომელიც 48° -ის ტოლია. იპოვეთ ABC სამკუთხედის კუთხეები.

4.47. ABC სამკუთხედში C წვეროდან გავლუბებულია შიგა და გარე კუთხის ბისექტრისები. პირველი ბისექტრისა AB გვერდთან ქმნის 40° -ის ტოლ კუთხეს. იპოვეთ კუთხე მეორე ბისექტრისასა და AB გვერდის გაგრძელებას შორის.

4.48. პიპოტენუზის შუაწერტილიდან აღმართულია პერპენდიკულარი კათეტთან გადაკვეთამდე და მიღებული წერტილი შეერთებულია მეორე კათეტის ბოლოსთან მონაკვეთით, რომელიც სამკუთხედის კუთხეს ეოვს შეფარდებით 2:5 (უმცირესი ნაწილი პიპოტენუზასთანაა). იპოვეთ ეს კუთხე.

4.49. სამკუთხედის ერთი გვერდი ორჯერ მეტია მეორეზე, ხოლო მათ შორის კუთხე 60° -ია. იპოვეთ სამკუთხედის დანარჩენი კუთხეები.

4.50. ABC სამკუთხედში $\angle C = 2\angle A$ და $AC = 2BC$. იპოვეთ სამკუთხედის კუთხეები.

ამოცანები დამტკიცებაზე

4.51. დაამტკიცეთ, რომ პარალელური წრფეებითა და მკვეთით შედგენილი შიგა ჯვარედინი კუთხეების ბისექტრისები ერთმანეთის პარალელურია.

4.52. დაამტკიცეთ, რომ ორ პარალელურ წრფესა და მკვეთს შორის შიგა ცალმხრივი კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთმართობულია.

4.53. ABC სამკუთხედში C წვეროზე გავლებულია CD მედიანა. დაამტკიცეთ, რომ DBC და DAC სამკუთხედებში B და A წვეროებიდან გავლებული სიმაღლეები ტოლია.

4.54. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის ბისექტრისა ფუძის პარალელურია.

4.55. BC მონაკვეთი a წრფეს O წერტილში გადაკვეთს. B და C წერტილებიდან a წრფემდე მანძილები ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ O წერტილი BC მონაკვეთის შუაწერტილია.

4.56. ABC სამკუთხედში გავლებულია B კუთხის ბისექტრისა, რომელიც AC გვერდს D წერტილში გადაკვეთს. D წერტილზე გავლებულია BC გვერდის პარალელური წრფე, რომელიც AB გვერდს F წერტილში გადაკვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $DF = BF$.

4.57. სამკუთხედის ბისექტრისის ფუძეზე გავლებულია წრფეები, რომლებიც მისი გვერდების პარალელურია. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფეების მონაკვეთები, რომლებიც მოთავსებულია სამკუთხედის გვერდებს შორის, ტოლია.

4.58. სამკუთხედის ბისექტრისაზე აღებულ წერტილზე სამკუთხედის გვერდების პარალელურად გავლებულია წრფეები. სამკუთხედის გვერდებს შორის მოთავსებული ამ წრფეების

მონაკვეთები ტოლი აღმოჩნდა. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა.

4.59. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის ბისექტრისა შუაზე ეოფს კიპორტენუზაზე დაშვებულ მედიანასა და სიმაღლეს შორის მდებარე კუთხეს.

4.60. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის კიპორტენუზი-სადმი გავლებულ მედიანასა და სიმაღლეს შორის მდებარე კუთხე ამ სამკუთხედის მახვილ კუთხეთა სხვაობის ტოლია.

4.61. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ნებისმიერი კუთხის ბისექტრისასა და სიმაღლეს შორის კუთხე დანარჩენი ორი კუთხის სხვაობის ნახევრის ტოლია.

4.62. დაამტკიცეთ, რომ თუ კათეტი კიპორტენუზაზე ორჯერ ნაკლებია, მაშინ ამ კათეტის მოპირდაპირე კუთხე უდრის 30° -ს.

4.63. დაამტკიცეთ, რომ თუ მედიანა უდრის იმ გვერდის ნახევარს, რომელსაც ის შუაზე ეოფს, მაშინ სამკუთხედი მართკუთხაა.

4.64. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედის წვეროზე და ფერდებისადმი გავლებული სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილ-ზე გამავალი წრფე სამკუთხედის ფუძის პერპენდიკულარულია.

4.65. *ABC* სამკუთხედის *A* და *C* კუთხეების ბისექტრისების გადაკვეთის *O* წერტილზე გავლებულია *AC* გვერდის პარალელური წრფე, რომელიც *AB* და *BC* გვერდებს გადაკვეთს შესაბამისად *M* და *N* წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $MN=AM+CN$.

§5. წრეწირი. ცენტრალური და ჩახაზული კუთხეები.

**მხეებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე. კუთხე
წვეროთი წრეწირის შიგნით და წრეწირის გარეთ**

ამოცანები გამოთვლაზე

5.1. წრეწირის რადიუსი უდრის 10 სმ-ს; *M* წერტილი *O* ცენტრიდან დაშორებულია 15 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი *M* წერტილიდან *OM* წრვის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილებამ-დე.

5.2. წრეწირები, რომელთა რადიუსებია 30 სმ და 40 სმ, ერთმანეთს ეხება. იპოვეთ მანძილი წრეწირების ცენტრებს შორის გარე და შიგა შეხების შემთხვევებში.

5.3. მოცემული წრეწირის წერტილიდან გავლებულია დიამეტრი და ქორდა, რომელიც რადიუსის ტოლია. იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

5.4. წრეწირის მოცემული წერტილიდან გავლებულია რადიუსის ტოლი ორი ქორდა. იპოვეთ კუთხე მათ შორის.

5.5. მოცემულია წრეწირის ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ქორდა. თითოეული მათგანი მეორით იყოფა 3 სმ-ისა და 7 სმ-ის სიგრძის ორ მონაკვეთად. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან თითოეულ ქორდამდე.

5.6. გავლებულია წრეწირის ორი ურთიერთპერპენდიკულარული ქორდა ისე, რომ მანძილი ცენტრიდან თითოეულ ქორდამდე 1 სმ-ია, თითოეული ქორდის სიგრძე 6 სმ-ია. იპოვეთ თითოეული ქორდის ნაწილების სიგრძე.

5.7. წრეწირის ქორდა მის დიამეტრს კვეთს 60° -იანი კუთხით და დიამეტრით იყოფა 8 სმ და 3 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ მანძილი ქორდის ბოლოებიდან დიამეტრზე დაშვებულ მართობების ფუძეებს შორის.

5.8. წრეწირის ქორდა მის დიამეტრს კვეთს 30° -იანი კუთხით და იყოფა 6 სმ და 12 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ: 1) მანძილი ქორდის ბოლოებიდან დიამეტრამდე; 2) მანძილი ქორდის შუაწერტილიდან დიამეტრამდე.

5.9. ქორდა დიამეტრს კვეთს 30° -იანი კუთხით და ყოფს მას ორ მონაკვეთად სიგრძით 2 სმ და 6 სმ. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან ქორდამდე.

5.10. 16 სმ სიგრძის ქორდა ჭიმავს 90° -იან რკალს. იპოვეთ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან ქორდამდე.

5.11. 15 სმ რადიუსიან წრეწირში გავლებული ქორდა ჭიმავს 120° -იან რკალს. იპოვეთ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან ქორდამდე.

5.12. გავლებულია წრეწირის ორი პარალელური ქორდა, რომლებიც ჭიმავენ 90° -იან რკალებს. იპოვეთ მანძილი ქორდებს შორის, თუ ერთი ქორდის სიგრძეა 12 სმ.

5.13. წრეწირის რადიუსის შუაწერტილზე გავლებულია მისი პერპენდიკულარული ქორდა. იპოვეთ კუთხე ამ ქორდის ბოლოებზე გავლებულ რადიუსებს შორის.

5.14. მოცემულია ორი კონცენტრული (საერთო ცენტრის მქონე) წრეწირი. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები, თუ დიდი წრეწირის დიამეტრი მცირე წრეწირით იყოფა 9 სმ, 12 სმ, 9 სმ სიგრძის მონაკვეთებად.

5.15. წრეწირი მთავსებულია მეორე წრეწირის შიგნით. დიდი წრეწირის დიამეტრი, რომელიც მცირე წრეწირის ცენტრზე

გადის, მცირე წრეწირით სამ ნაწილად იყოფა, რომლებიც შესაბამისად 2 სმ-ის, 10 სმ-ისა და 6 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ წრეწირების დიამეტრები და ცენტრებს შორის მანძილი.

5.16. წრეწირი მოთავსებულია მეორე წრეწირის შიგნით. დიდი წრეწირის დიამეტრი, რომელიც მცირე წრეწირის ცენტრზე გადის, მცირე წრეწირით სამ ნაწილად იყოფა, რომელთაგან ორი კიდური მონაკვეთის სიგრძე 10 სმ და 5 სმ-ია. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები და მანძილი ცენტრებს შორის, თუ რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:5.

5.17. მოცემულია ორი კონცენტრული წრეწირი. დიდი წრეწირის ორი ურთიერთმართობული ქორდიდან თითოეული წარმოადგენს მცირე წრეწირის მხეხის მონაკვეთს და გადაკვეთის წერტილით იყოფა 3 სმ და 7 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად. იპოვეთ მცირე წრეწირის რადიუსი.

5.18. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. წრეწირების რადიუსები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 2:3. იპოვეთ წრეწირების დიამეტრები, თუ წრეწირების ცენტრებს შორის მანძილი 10 სმ-ია.

5.19. ორი წრეწირი შიგნიდან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ ამ წრეწირების რადიუსები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:2, ხოლო ცენტრებს შორის მანძილი 15 სმ-ია.

5.20. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს A წერტილში. BC მათი საერთო გარე მხებია (B და C წერტილები მხეხების წერტილებია). იპოვეთ $\angle BAC$.

5.21. R რადიუსიანი სამი წრეწირი გარედან ეხება ერთიმეორეს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის გვერდები და კუთხეები, რომლის წვეროები მხეხების წერტილებია.

5.22. ორი ტოლი წრეწირი შიგნიდან ეხება მესამე წრეწირს და ეხება ერთმანეთსაც. სამივე ცენტრის შეკრთვით მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი 18 სმ-ია. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსი.

5.23. იპოვეთ რკალის გრადუსული ზომა თუ მის ბოლოზე გავლებული რადიუსი ამ რკალის მოჭიმავ ქორდასთან 40° -იან კუთხეს შეადგენს.

5.24. იპოვეთ კუთხე ქორდასა და მის ბოლოზე გავლებულ რადიუსს შორის, თუ ქორდით მოჭიმული რკალის გრადუსული ზომაა 62° .

5.25. წრეწირზე აღნიშნულია ოთხი წერტილი: A , B , C , D . რას უდრის $\angle ADC$ კუთხე, თუ $\angle ABC$ კუთხე α -ს ტოლია? (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

5.26. წრეწირის AB და AC რკალის გრადუსული ზომები შესაბამისად არის 110° და 38° . იპოვეთ BAC კუთხე (განიხილეთ ორი შემთხვევა).

5.27. წრეწირის AD და BC ქორდები ერთმანეთს გადაკვეთს. ABC კუთხე 10° -ს უდრის, ACD კუთხე კი 20° -ს. იპოვეთ CAD კუთხე.

5.28. სამკუთხედის გვერდი 10 სმ-ს უდრის, მისი მოპირდაპირე კუთხეა 150° . იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

5.29. A , B , C წერტილები წრეწირზე მდებარეობს. რას უდრის AC ქორდა, თუ ABC კუთხე 30° -ის ტოლია, წრეწირის დიამეტრი კი 10 სმ-ია?

5.30. A , B , C წერტილები წრეწირზე მდებარეობს. რას უდრის ABC კუთხე, თუ AC ქორდა წრეწირის რადიუსის ტოლია? განიხილეთ ორი შემთხვევა.

5.31. როგორ კუთხეებს აღგენს წრეწირის რადიუსის ტოლი AB ქორდა A წერტილში გავლენულ მხებთან?

5.32. რა კუთხეებით გადაკვეთს ერთმანეთს რადიუსის ტოლი ქორდის ბოლოებში გავლენული მხებები?

5.33. სამი წერტილით წრეწირი გაყოფილია სამ რკალად, რომელთა გრადუსული ზომები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც $7:11:6$. იპოვეთ იმ სამკუთხედის კუთხეები, რომლის წვეროებსაც ეს წერტილები წარმოადგენენ.

5.34. ABC სამკუთხედში, რომლის $\angle B = 82^\circ$, ნახაზულია წრეწირი. შეხების წერტილების შეერთებით მიღებულია სამკუთხედი. იპოვეთ ამ სამკუთხედის იმ კუთხის გრადუსული ზომა, რომლის წვერო AC გვერდზე ძეცს.

5.35. იპოვეთ რკალის გრადუსული ზომა, თუ ამ რკალის ბოლოდან გავლენული მისი მომჭიმავი ქორდის მართობული წრფე დამატებით რკალს ეოფს შეფარდებით $5:2$.

5.36. ტოლფერდა სამკუთხედის კუთხე წვეროსთან უდრის 40° -ს. ერთი ფერდი წარმოადგენს ნახევარწრეწირის დიამეტრს; ეს ნახევარწრეწირი სხვა გვერდებით იყოფა 3 ნაწილად. იპოვეთ ეს ნაწილები.

5.37. AB დიამეტრის გაგრძელებაზე აღებული C წერტილიდან გავლენულია CD მხები. $\angle ADC = 114^\circ$. იპოვეთ BD რკალის გრადუსული ზომა.

5.38. ABC სამკუთხედის AB გვერდი წარმოადგენს წრეწირის დიამეტრს, BC მხებია, ხოლო AC წრეწირით შუაზე იყოფა. იპოვეთ C კუთხე.

5.39. M წერტილიდან გავლებულია წრეწირის ორი მკვეთი: MAB , რომელიც გადის წრეწირის O ცენტრზე და MCD , რომლის გარე ნაწილი წრეწირის რადიუსის ტოლია. იპოვეთ მკვეთთა შორის კუთხე, თუ ცენტრალური DOB კუთხე ტოლია 72° .

5.40. 60° -ის ტოლ მახვილ კუთხეში ნახაზულია ორი წრეწირი, რომლებიც გარედან ეხებიან ერთმანეთს. მცირე წრეწირის რადიუსი უდრის r -ს. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსი.

5.41. წრეწირის 120° -იანი რკალის ბოლოებიდან გავლებულია მხეხები და ამ მხეხებითა და მოცემული რკალით შედგენილ ფიგურაში ნახაზულია წრეწირი. იპოვეთ მისი რადიუსი, თუ თავდაპირველი წრეწირის რადიუსი $R=16$.

5.42. AB დიამეტრი და CD ქორდა M წერტილში იკვეთება. $\angle CMB=73^\circ$. BC რკალის გრადუსული ზომაა 110° . იპოვეთ BD რკალის გრადუსული ზომა.

5.43. AB და CD ქორდები M წერტილში იკვეთება. $\angle AMC=40^\circ$. AD რკალის გრადუსული ზომა 20° -ით მეტია CB რკალის გრადუსულ ზომაზე. იპოვეთ AD რკალის გრადუსული ზომა.

5.44. AB ქორდის გაგრძელებაზე აღებული C წერტილიდან გავლებული CD მხეხი BDA რკალს ეოვს შეფარდებით $7:9$. იპოვეთ კუთხე C , თუ BDA რკალის გრადუსული ზომა 112° -ია.

5.45. იპოვეთ 200° -იანი რკალის ბოლოებზე გავლებული მხეხებით შედგენილი მახვილი კუთხე.

5.46. ქორდა წრეწირს ეოვს შეფარდებით $11:7$. იპოვეთ ამ ქორდის ბოლოებზე გავლებული მხეხებით შედგენილი მახვილი კუთხე.

5.47. წრეწირი გაყოფილია შეფარდებით $5:9:10$ და გაყოფის წერტილებზე გავლებულია მხეხები. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის უდიდესი კუთხე.

5.48. ABC სამკუთხედში C კუთხე მართია. C ცენტრიდან AC რადიუსით შემოხაზულია წრეწირი, რომელიც პიპოტენუსას D წერტილში კვეთს და CB კათეტს E -ში. იპოვეთ AD და DE რკალების გრადუსული ზომა, თუ $\angle B=37^\circ$.

5.49. AB ქორდის B ბოლოზე გავლებულია წრეწირის მხეხი (AB რკალი 90° -ზე ნაკლებია). წრეწირის ცენტრია O წერტილი. OA რადიუსის პერპენდიკულარული დიამეტრის გაგრძელება მხეხსა და ქორდის გაგრძელებას კვეთს შესაბამისად C და D წერტილებში. იპოვეთ $\angle DBC$, თუ $\angle BDO=25^\circ$.

5.50. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფუძეა 6 სმ, ხოლო ფერდი – 9 სმ, ნახაზულია წრეწირი. იპოვეთ მხეხების წერტილით მიღებული ფერდის მონაკვეთები.

5.51. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი ნახაზული წრეწირის შეხების წერტილით იყოფა შეფარდებით 7:5 (წვეროდან). იპოვეთ ფერდისა და ფუძის შეფარდება.

5.52. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი უდრის 2 სმ; კუთხე წვეროსთან არის 120° . იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი.

5.53. იპოვეთ იმ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი და სიმაღლე, რომლის წვეროსთან მდებარე კუთხეა 120° , თუ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია 10 სმ.

5.54. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია. შემოხაზული წრის OA რადიუსი AC ფუძესთან ქმნის OAC კუთხეს, რომელიც უდრის 20° . იპოვეთ $\angle BAC$ (ორი შემთხვევა).

5.55. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს C წერტილში. AB საერთო გარე მხებია. ABC სამკუთხედის უმცირესი კუთხეა 30° , უმცირესი გვერდი კი a . იპოვეთ უდიდესი გვერდი.

5.56. ორი წრეწირი ერთმანეთს ეხება შიგნიდან A წერტილში. დიდი წრეწირის O ცენტრიდან გავლებული OB რადიუსი მცირე წრეწირს ეხება C წერტილში. იპოვეთ $\angle BAC$.

ამოცანები დამტკიცებაზე

5.57. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს, შეხების წერტილზე გავლებული მკვეთი თითოეულ წრეწირს ეოფს ორ რკალად. დაამტკიცეთ, რომ მკვეთის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მოთავსებული სხვადასხვა წრეწირის რკალების გრადუსული ზომები ტოლია.

5.58. წრეწირები, რომელთა ცენტრებია O და O_1 წერტილები A და B წერტილებში გადაკვეთს ერთმანეთს. დაამტკიცეთ, რომ AB წრფე OO_1 წრფის მართობულია.

5.59. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის ერთი და იმავე დიამეტრის ბოლოებიდან გავლებული ორი პარალელური ქორდა ტოლია.

5.60. წრეწირზე აღნიშნულია A , B , C და D წერტილები ისე, რომ მცირე რკალები AC და BD ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ABC და BCD სამკუთხედები ტოლია.

5.61. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილზე გავლებული ყველა ქორდიდან უმცირესია ის, რომელიც ამ წერტილზე გაშვებული დიამეტრის მართობულია.

5.62. დაამტკიცეთ, რომ ორი ტოლი ურთიერთგადაკვეთი ქორდის მონაკვეთები შესაბამისად ტოლია.

5.63. დაამტკიცეთ, რომ სხვადასხვაგვარდა სამკუთხედის ბისექტრისა ძვეს იმავე წვეროდან გავლელულ მედიანასა და სიმაღლეს შორის.

5.64. წრეწარზე აღებულია 4 წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ მოპირდაპირე რკალების შუაწერტილებზე გამავალი წრფეები ურთიერთმართობულია.

5.65. OA და OB წრეწირის ურთიერთმართობული რადიუსებია; ამ რადიუსებზე როგორც დიამეტრებზე აგებული წრეწირების გადაკვეთის წერტილია C . დაამტკიცეთ, რომ: 1) OC სხივი AOB კუთხის ბისექტრისაა; 2) A , C და B წერტილები ერთ წრფეზე მდებარეობს.

5.66. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ორ გვერდზე, როგორც დიამეტრებზე შემოხაზული წრეწირების გადაკვეთის ერთ-ერთი წერტილი მდებარეობს მესამე გვერდის შემცველ წრფეზე.

5.67. ორი წრეწირის შეხების წერტილზე გავლებულია მკვეთი. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ქორდების ბოლოებზე გავლებული მხეხები და რადიუსები პარალელურია.

5.68. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორ წრეწირს გააჩნია საერთო შიგა მხეხები,* მაშინ შეხების წერტილებს შორის მოთავსებული ამ მხეხების მონაკვეთები ტოლია.

5.69. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორ წრეწირს გააჩნია საერთო გარე მხეხები,** მაშინ შეხების წერტილებს შორის მოთავსებული ამ მხეხების მონაკვეთები ტოლია.

5.70. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირის დიამეტრის ბოლოებზე გავლებული ნებისმიერი ორი პარალელური ქორდების ბოლო წერტილების შემაერთებული წრფე წრეწირის ცენტრზე გაივლის.

5.71. S წერტილზე გავლებულია წრეწირის SA და SB მხეხები. t მხეხი SA და SB მონაკვეთებს A_1 და B_1 წერტილებში გადაკვეთს. დაამტკიცეთ, რომ SA_1B_1 სამკუთხედის პერიმეტრი არ არის დამოკიდებული იმაზე, რომელი t მხეხია აღებული.

5.72. AB ქორდის B ბოლოზე გავლებულია წრეწირის მხეხი (AB რკალი 90° -ზე ნაკლებია). OA რადიუსის პერპენდიკულარული დიამეტრის გაგრძელება მხეხსა და ქორდის გაგრძელებას კვეთს შესაბამისად C და D წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ BC და CD მონაკვეთები ტოლია.

* ორი წრეწირის საერთო მხეხს შიგა მხეხი ეწოდება, თუ მათი ცენტრები მხეხის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ.

** ორი წრეწირის საერთო მხეხს გარე მხეხი ეწოდება, თუ მათი ცენტრები მხეხის მიმართ ერთ ნახევარსიბრტყეში მდებარეობენ.

5.73. O ცენტრის მქონე წრეწირის a მხები კვეთს პარალელურ b და c მხებებს M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $\angle MON = 90^\circ$.

5.74. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედის A წვერო შეერთებულია სამკუთხედზე შემოხაზული წრის O ცენტრთან. A წვეროდან გავლებულია AD სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ $\angle BAD = \angle OAC$.

5.75. წრეწირში ნახაზულია ABC სამკუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ A კუთხის ბისექტრისის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილზე და ცენტრზე გაშვებული წრფე BC გვერდის მართობულია.

5.76. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედში ბისექტრისა წარმოადგენს ამავე წვეროდან გამოსული სიმაღლისა და შემოხაზული წრეწირის რადიუსით შედგენილი კუთხის ბისექტრისას.

§6. მრავალკუთხედები. პარალელოგრამი. მართკუთხედი. რომბი. კვადრატი. ტრაპეცია. ნახაზული და შემოხაზული ოთხკუთხედები

ამოცანები გამოთვლაზე

6.1. გამოთვალეთ ოთხკუთხედის მეოთხე კუთხის სიდიდე, თუ მისი სამი კუთხე უდრის: 1) $89^\circ, 92^\circ, 97^\circ$; 2) $72^\circ, 89^\circ, 92^\circ$.

6.2. $ABCD$ ოთხკუთხედში $\angle D = 102^\circ$. $\angle A = \angle B = \angle C$. გამოთვალეთ ოთხკუთხედის ყველა კუთხე.

6.3. 40° -ის ტოლი კუთხის შიგნით აღებული წერტილზე კუთხის გვერდებისადმი გავლებულია პერპენდიკულარები. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის კუთხეები.

6.4. გამოთვალეთ ოთხკუთხედის გარე კუთხეები, თუ მისი სამი შიგა კუთხე უდრის $38^\circ, 158^\circ, 44^\circ$.

6.5. სამკუთხედის ორი წვეროდან დაშვებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე 130° -ია. იპოვეთ მესამე წვეროსთან მდებარე კუთხე.

6.6. დიაგონალით ოთხკუთხედი გაყოფილია ორ სამკუთხედად, რომელთა პერიმეტრებია 25 მ და 27 მ; ოთხკუთხედის პერიმეტრი კი უდრის 32 მ-ს. იპოვეთ ამ დიაგონალის სიგრძე.

6.7. პარალელოგრამის ერთი კუთხე 40° -ს უდრის, იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

6.8. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ ერთი მათგანი მეორეზე 50° -ით მეტია.

6.9. პარალელოგრამის დიაგონალი მის ორ გვერდთან 25° -იან და 35° -იან კუთხეებს ადგენს. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

6.10. იპოვეთ პარალელოგრამის ყველა კუთხე, თუ ორი მათგანის ჯამია: 1) 80° ; 2) 100° ; 3) 160° .

6.11. იპოვეთ პარალელოგრამის ყველა კუთხე, თუ ორი მათგანის სხვაობაა: 1) 70° ; 2) 110° ; 3) 140° .

6.12. იპოვეთ პარალელოგრამის ყველა კუთხე, თუ: 1) პარალელოგრამის ერთი კუთხე ოთხჯერ მეტია მეორეზე; 2) პარალელოგრამის კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:7.

6.13. $ABCD$ პარალელოგრამში BD დიაგონალი, CD გვერდთან ადგენს 68° -ის ტოლ კუთხეს. $\angle ABC = 84^\circ$. იპოვეთ $\angle ADB$ და $\angle BCD$.

6.14. $ABCD$ პარალელოგრამში AC დიაგონალი DC გვერდთან ადგენს 40° -ის ტოლ კუთხეს. იპოვეთ $\angle ADC$ და $\angle BAC$, თუ $\angle ABC = 110^\circ$.

6.15. პარალელოგრამის მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის მოთავსებული კუთხე უდრის 110° -ს. იპოვეთ პარალელოგრამის კუთხეები.

6.16. პარალელოგრამის ორი კუთხე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 13. იპოვეთ კუთხე პარალელოგრამის სიმაღლეებს შორის, რომლებიც გავლებულია: 1) ბლაგვი კუთხის წვეროდან; 2) მახვილი კუთხის წვეროდან.

6.17. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი 5 მ-ს უდრის. ამ სამკუთხედის ფუძეზე მდებარე წერტილიდან გავლებულია გვერდების პარალელური ორი წრფე. იპოვეთ მიღებული პარალელოგრამის პერიმეტრი.

6.18. პარალელოგრამის პერიმეტრი უდრის 152 სმ-ს, მისი ერთი გვერდი 25 სმ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

6.19. პარალელოგრამის ორი გვერდი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4, მისი პერიმეტრი კი 2,8 მ-ს უდრის. იპოვეთ გვერდები.

6.20. $ABCD$ პარალელოგრამში B წვეროდან AD გვერდზე დაშვებული მართობი ამ გვერდს შუაზე ყოფს. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები, თუ $BD = 0,9$ მ-ს, ხოლო პარალელოგრამის პერიმეტრი 3,8 მ-ის ტოლია.

6.21. პარალელოგრამში მახვილი კუთხე უდრის 60° . პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე პარალელოგრამის გვერდს შუაზე ყოფს. იპოვეთ პარალელოგრამის მცირე დიაგონალი, თუ პერიმეტრი 24 სმ-ის ტოლია.

6.22. $ABCD$ პარალელოგრამში AB გვერდი უდრის 9 სმ და შეადგენს პერიმეტრის $\frac{3}{10}$ -ს. იპოვეთ ამ პარალელოგრამის სხვა გვერდები.

6.23. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის ბისექტრისა მის გვერდს ყოფს შეფარდებით 2:1, ბლაგვი კუთხის წვეროს მხრიდან. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 60 სმ-ს უდრის.

6.24. პარალელოგრამის ერთი კუთხე სამჯერ მეტია მეორეზე. ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე მოპირდაპირე გვერდს ორ ნაწილად ყოფს: 2 სმ და 4 სმ. იპოვეთ პარალელოგრამის სიმაღლე.

6.25. $ABCD$ ოთხკუთხედი პარალელოგრამია და მისი პერიმეტრი 10 სმ-ს უდრის. იპოვეთ BD დიაგონალის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ ABD სამკუთხედის პერიმეტრი 8 სმ-ის ტოლია.

6.26. მართკუთხედის ერთ-ერთი კუთხის ბისექტრისა დიდ გვერდს შუაზე ყოფს. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი მცირე გვერდი 10 სმ-ს უდრის.

6.27. პარალელოგრამის დიდ გვერდთან მდებარე ორი კუთხის ბისექტრისები მოპირდაპირე გვერდს ყოფენ სამ ნაწილად. იპოვეთ თითოეული მათგანი, თუ პარალელოგრამის გვერდებია: 1) 8 სმ და 3 სმ; 2) 10 სმ და 7 სმ.

6.28. $ABCD$ პარალელოგრამში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია წრფე, რომელიც BC და AD გვერდებზე ჩამოჭრის მონაკვეთებს: $BE=2$ მ და $AF=2,8$ მ. იპოვეთ BC და AD გვერდები.

6.29. $ABCD$ პარალელოგრამში გავლებულია A კუთხის ბისექტრისა, რომელიც BC გვერდს E წერტილში გადაკვეთს. რას უდრის BE და EC მონაკვეთები, თუ $AB=9$ სმ, $AD=15$ სმ?

6.30. მართკუთხედში დიაგონალები 50° -ის ტოლ კუთხეს ადგენენ. განსაზღვრეთ კუთხეები მართკუთხედის დიაგონალსა და მის გვერდებს შორის.

6.31. მართკუთხედის დიაგონალით და გვერდით შედგენილი კუთხე უდრის 36° -ს. იპოვეთ კუთხეები დიაგონალებს შორის.

6.32. მართკუთხედში წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი მართ კუთხეს ყოფს შეფარდებით 3:1. იპოვეთ კუთხის სიდიდე ამ პერპენდიკულარსა და მეორე დიაგონალს შორის.

6.33. პარალელოგრამის პერიმეტრი 120 სმ-ია, მახვილი კუთხე უდრის 60° -ს. პარალელოგრამის დიაგონალი ბლაგვ კუთხეს ყოფს შეფარდებით 1:3. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

6.34. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 6 სმ-ის ტოლია. ჰიპოტენუზის შუაწერტილზე გავლებულია კათეტების პარალელური წრფეები. განსაზღვრეთ მიღებული ოთხკუთხედის სახე და იპოვეთ მისი დიაგონალები.

6.35. მართკუთხედში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან გვერდებისადმი გავლებული პერპენდიკულარები შესაბამისად 4 სმ-ისა და 6 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ ამ მართკუთხედის პერიმეტრი.

6.36. მართკუთხედში დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი მცირე გვერდიდან 4 სმ-ით უფრო შორსაა, ვიდრე დიდი გვერდიდან. მართკუთხედის პერიმეტრი 56 სმ-ს უდრის. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

6.37. მართკუთხედის დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის 60° . ორივე დიაგონალისა და ორივე მცირე გვერდის ჯამი არის 3.6 მ. იპოვეთ დიაგონალების სიგრძე.

6.38. M არის $ABCD$ მართკუთხედის BC გვერდის შუაწერტილი. ცნობილია, რომ AM და MD ურთიერთპერპენდიკულარულია და $ABCD$ მართკუთხედის პერიმეტრი უდრის 24 მ. იპოვეთ მისი გვერდები.

6.39. მართკუთხედის წვეროდან მის დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარი ამ დიაგონალს ყოფს შეფარდებით 1:3. იპოვეთ დიაგონალის სიგრძე, თუ ცნობილია, რომ დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი დიდი გვერდიდან 2 მ-ით არის დაშორებული.

6.40. მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული კათეტი 6 სმ-ს უდრის. მასში ნახაზულია მართკუთხედი, რომელსაც სამკუთხედთან საერთო კუთხე აქვს. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.

6.41. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მისი ორი წვერო ჰიპოტენუზაზე მდებარეობს, დანარჩენი ორი კი – კათეტებზე. რას უდრის მართკუთხედის გვერდები, თუ ცნობილია, რომ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:2, სამკუთხედის ჰიპოტენუზა კი 45 სმ-ის ტოლია.

6.42. წრეწირის ერთი წერტილიდან გავლებულია ორი ურთიერთმართობული ქორდა, რომლებიც ცენტრიდან 6 სმ-ით და 10 სმ-ით არის დაშორებული. იპოვეთ მათი სიგრძეები.

6.43. რომბის დიაგონალების მიერ მის ერთ გვერდთან შედგენილი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:5. იპოვეთ რომბის კუთხეები.

6.44. რომბის გვერდი მის დიაგონალებთან შეადგენს კუთხეებს, რომელთა სხვაობა უდრის 20° -ს. იპოვეთ რომბის კუთხეები.

6.45. რომში ერთი დიაგონალი უდრის რომის გვერდს. იპოვეთ რომის დიაგონალებით მის გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.

6.46. რომის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები აღგენენ 30° -იან კუთხეს. იპოვეთ: 1) რომის კუთხეები; 2) რომის დიაგონალებით მის გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.

6.47. რომის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები აღგენენ 120° -იან კუთხეს. იპოვეთ: 1) რომის კუთხეები; 2) რომის დიაგონალებით მის გვერდებთან შედგენილი კუთხეები.

6.48. რომის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე რომის გვერდს შეაზე ყოფს. იპოვეთ: 1) რომის კუთხეები; 2) რომის პერიმეტრი, თუ მისი მცირე დიაგონალი უდრის 20 მმ.

6.49. რომის პერიმეტრი 8 სმ-ია, სიმაღლე კი 1 სმ. იპოვეთ რომის ბლაგვი კუთხე.

6.50. წრეწირზე აღებული A წერტილიდან გავლებულია ორი ქორდა AB და AC , რომლებიც წრეწირის რადიუსის ტოლია. იპოვეთ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან BC ქორდამდე, თუ წრეწირის რადიუსი 10 სმ-ის ტოლია.

6.51. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის მახვილი კუთხეა 60° , ისეა ნახაზული 6 სმ გვერდის მქონე რომი, რომ 60° -იანი კუთხე მათ საერთო აქვთ, ხოლო რომის ყველა წვერო სამკუთხედის გვერდებზე მდებარეობს. იპოვეთ სამკუთხედის პიპოტენუზა.

6.52. კვადრატის დიაგონალი 4 მ-ია. მისი გვერდი მეორე კვადრატის დიაგონალის ტოლია. იპოვეთ მეორე კვადრატის გვერდი.

6.53. მოცემულია კვადრატი, რომლის გვერდი 1 მ-ს უდრის. მისი დიაგონალი მეორე კვადრატის გვერდის ტოლია. იპოვეთ მეორე კვადრატის დიაგონალი.

6.54. კვადრატის დიაგონალი უდრის 12 სმ-ს. კვადრატის წვეროებზე გავლებულია დიაგონალების პარალელური წრფეები. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

6.55. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული კათეტი 2 მ-ს უდრის. ამ სამკუთხედში ნახაზულია კვადრატი, რომელსაც მასთან საერთო კუთხე აქვს. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი.

6.56. კვადრატში ნახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ მის თითოეულ გვერდზე მართკუთხედის ერთი წვერო მდებარეობს და მართკუთხედის გვერდები კვადრატის დიაგონალების პარალელურია. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები, თუ ცნობილია,

რომ ერთი მათგანი ორჯერ მეტია მეორეზე და კვადრატის დიაგონალი 12 მ-ს უდრის.

6.57. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზულია კვადრატი ისე, რომ მისი ორი წვერო პიპოტენუზაზე მდებარეობს, დანარჩენი ორი კი – კათეტებზე. იპოვეთ კვადრატის გვერდი, თუ ცნობილია, რომ პიპოტენუზა 3 მ-ს უდრის.

6.58. მოცემული წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი ურთიერთმართობული მხები; წრეწირის რადიუსი 10 სმ-ს უდრის. იპოვეთ მხებების მონაკვეთთა სიგრძეები.

6.59. ორი წრის რადიუსებია 2,5 და 6,7; მათი საერთო შიგა მხებები ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ შიგა მხების მონაკვეთის სიგრძე შესხების წერტილებს შორის.

6.60. წრეწირზე, რომლის რადიუსი უდრის 5 სმ, შემოსახულია მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის პერიმეტრია 70 სმ. იპოვეთ პიპოტენუზა.

6.61. წრეწირზე, რომლის რადიუსი უდრის 4 სმ, შემოსახულია მართკუთხა სამკუთხედი 26 სმ-იანი პიპოტენუზით. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

6.62. 10 სმ რადიუსის მქონე წრეწირისადმი გავლებულია ურთიერთპერპენდიკულარული MA და MB მხებები. შესხების A და B წერტილებს შორის უმცირეს AB რკალზე აღებულია ნებისმიერი C წერტილი და მასზე გავლებულია მხები, რომელიც MA და MB მხებებს გადაკვეთს შესაბამისად K და L წერტილებში. იპოვეთ MKL სამკუთხედის პერიმეტრი.

6.63. წრეწირისადმი გავლებულია ორი ურთიერთმართობული მხები. შესხების წერტილთა შემაერთებელი ქორდა უდრის 2 დმ-ს. იპოვეთ მანძილი წრეწირის ცენტრიდან ამ ქორდამდე.

6.64. სამკუთხედის გვერდები 8 სმ-ს, 10 სმ-ს და 12 სმ-ს უდრის. იპოვეთ იმ სამკუთხედის გვერდები, რომლის წვეროებიც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს.

6.65. სამკუთხედის პერიმეტრი 12 სმ-ს უდრის. გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მონაკვეთებით. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრი.

6.66. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4:5, მისი პერიმეტრი უდრის 60 სმ-ს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის პერიმეტრი და გვერდები, რომლის წვეროებიც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებშია.

6.67. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7:8:9. იმ სამკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროებიც მოცემული სამკუთხედის გვერდების შუაწერტილებშია, უდრის 24 სმ-ს. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის გვერდები.

6.68. ტოლფერდა სამკუთხედის შუახაზი, რომელიც ფუძის პარალელურია, 3 სმ-ს უდრის. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 16 სმ-ია.

6.69. იმ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის შუაწერტილზე, რომლის კათეტებია 3 სმ და 4 სმ, გავლებულია კათეტების პარალელური წრფეები. იპოვეთ მიღებული მართკუთხედის პერიმეტრი.

6.70. რომბის დიაგონალებია 10 სმ და 24 სმ. მასში ჩახაზულია ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებს რომბის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს. იპოვეთ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

6.71. ოთხკუთხედის დიაგონალებია 10 მ და 12 მ. მასში ჩახაზულია ოთხკუთხედი, რომლის წვეროებს მოცემული ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს. იპოვეთ ჩახაზული ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

6.72. ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლეა 30 სმ. განსაზღვრეთ რა მანძილზეა მისი გვერდებიდან ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილი.

6.73. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდისადმი გავლებული მედიანა უდრის 30 სმ-ს და ფუძესთან აღგენს 30° -იან კუთხეს. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.

6.74. $ABCD$ რომბში B კუთხე უდრის 120° -ს. განსაზღვრეთ ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებულ სიმაღლეებს შორის მათავსებული დიაგონალის მონაკვეთი, თუ $AC=21$ სმ.

6.75. $ABCD$ რომბის B წვეროდან გავლებულია BM და BN მონაკვეთები, რომლებიც AD და DC გვერდებს შუაზე ყოფს. ამ მონაკვეთების AC დიაგონალთან გადაკვეთის წერტილებია K და L . იპოვეთ KL მონაკვეთი, თუ AC დიაგონალი 15 სმ-ია.

6.76. ტრაპეციის ფუძესთან მდებარე კუთხეებია 68° და 74° . იპოვეთ დანარჩენი კუთხეები.

6.77. რას უდრის ტოლფერდა ტრაპეციის კუთხეები, თუ ცნობილია, რომ მოპირდაპირე კუთხეების სხვაობა 40° -ია.

6.78. ტოლფერდა ტრაპეციის მცირე ფუძე ფერდის ტოლია, დიაგონალი კი ფერდის მართობულია. იპოვეთ ტრაპეციის კუთხეები.

6.79. ტრაპეციაში ფერდები მცირე ფუძის ტოლია, დიაგონალი ფუძესთან აღგენს 30° -ის ტოლ კუთხეს. იპოვეთ ტრაპეციის ყველა კუთხე.

6.80. ტრაპეციის დიაგონალი ფერდის პერპენდიკულარია. ამ დიაგონალის პირდაპირ მდებარე მახვილი კუთხე უდრის 40° -ს. იპოვეთ ტრაპეციის დანარჩენი კუთხეები, თუ მცირე ფუძე მეორე ფერდის ტოლია.

6.81. ტოლფერდა ტრაპეციის დიდი ფუძე 2,7 მ-ია, ფერდი – 1 მ, მათ შორის კუთხე – 60° . იპოვეთ მცირე ფუძე.

6.82. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ ცნობილია, რომ მახვილი კუთხე უდრის 60° -ს, ხოლო ფუძეები 15 სმ და 49 სმ-ია.

6.83. ტოლფერდა ტრაპეციაში ერთი კუთხე უდრის 60° -ს, ფერდი უდრის 24 სმ-ს. ხოლო ფუძეების ჯამია 43 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

6.84. ტოლფერდა ტრაპეციაში ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლე დიდ ფუძეს 6 სმ-ისა და 30 სმ-ის სიგრძის მონაკვეთებად ყოფს. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

6.85. $ABCD$ ტრაპეციაში BC მცირე ფუძე უდრის 4 სმ-ს. B წვეროზე გავლებულია ფერდის პარალელური წრფე. მიღებული სამკუთხედის პერიმეტრია 12 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.

6.86. ტრაპეციის დიაგონალი შეამონაკვეთს ყოფს 6 სმ და 21 სმ სიგრძის ნაწილებად. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

6.87. ტრაპეციის დიაგონალი ტრაპეციის შეამონაკვეთს ყოფს ორ მონაკვეთად, რომლებიც ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 3:8. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ შეამონაკვეთის მონაკვეთების სხვაობა 10 სმ-ის ტოლია.

6.88. ტრაპეციის შეამონაკვეთის სიგრძე უდრის 8 სმ-ს და დიაგონალით იყოფა ორ მონაკვეთად, რომელთა სიგრძეების სხვაობა 2 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე.

6.89. ტოლფერდა ტრაპეციაში ფერდი შეამონაკვეთის ტოლია. პერიმეტრი 21 სმ-ია. იპოვეთ ფერდის სიგრძე.

6.90. იპოვეთ $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციის AD დიდი ფუძე, თუ ACD და BAC სამკუთხედების პერიმეტრების სხვაობა უდრის 6-ს, ტრაპეციის შეამონაკვეთი კი 12-ია.

6.91. ტოლფერდა ტრაპეციაში მახვილი კუთხე უდრის 45° -ს. მისი სიმაღლეა 12, შეამონაკვეთი კი – 21. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე.

6.92. ტრაპეციის ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3, ხოლო შეახაზი 5 მ-ს უდრის. იპოვეთ ფუძეები.

6.93. ტრაპეციის ფუძეების სიგრძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7:3, მათი სხვაობა კი 3,2 მ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შეამონაკვეთის სიგრძე.

6.94. ტრაპეციის შეახაზი 7 სმ-ს უდრის, ხოლო მისი ერთი ფუძე 4 სმ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

6.95. ტრაპეციის ფერდი გაყოფილია 4 ტოლ ნაწილად და დაყოფის წერტილებზე გავლებულია ტრაპეციის ფუძეების პარალელური წრფეები. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდებს შორის მოთავ-

სებული პარალელური წრფეების მონაკვეთების სიგრძეები, თუ ტრაპეციის ფუძეებია 23 სმ და 15 სმ.

6.96. ტრაპეციის ფერდი სამ ტოლ ნაწილადაა გაყოფილი და დაეფოს წერტილებიდან მეორე ფერდისადმი გავლებულია ფუძის პარალელური მონაკვეთები. რას უდრის ამ მონაკვეთების სიგრძეები, თუ ტრაპეციის ფუძეები 2 მ და 5 მ-ია?

6.97. ტრაპეციის ფუძეებია 17 სმ და 3 სმ. იპოვეთ დიაგონალების შეაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის სიგრძე.

6.98. ტრაპეციის ერთ ფუძესთან კუთხის სიდიდეებია 23° და 67° , ხოლო ფუძეების შეაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი 3 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ შუახაზი 7 სმ-ია.

6.99. მოცემული წრფის ერთ მხარეს აღებულია ორი – A და B წერტილი, რომლებიც ამ წრფიდან 10 მ-ისა და 20 მ-ის მანძილზე მდებარეობს. იპოვეთ AB მონაკვეთის შეაწერტილიდან მოცემულ წრფემდე მანძილი.

6.100. მოცემული წრფის სხვადასხვა მხარეს აღებულია ორი – A და B წერტილი, რომლებიც ამ წრფიდან 10 სმ-ით და 4 სმ-ით არიან დაშორებული. იპოვეთ AB მონაკვეთის შეაწერტილიდან მოცემულ წრფემდე მანძილი.

6.101. დიამეტრის ბოლოები წრეწირის მხებიდან 1,6 მ-ით და 0,6 მ-ით არიან დაშორებული. იპოვეთ დიამეტრის სიგრძე.

6.102. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი მახვილ კუთხეს შუაზე ყოფს. ტრაპეციის პერიმეტრი 132 სმ-ის ტოლია, ხოლო ფუძეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:5. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთი.

6.103. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიაგონალი მახვილ კუთხეს შუაზე ყოფს. ამ ტრაპეციის პერიმეტრი 4,5-ია, დიდი ფუძე კი 1,5. იპოვეთ მცირე ფუძე.

6.104. ტრაპეციაში დიაგონალები წარმოადგენენ მახვილი კუთხის ბისექტრისებს. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ დიაგონალი შუამონაკვეთს ყოფს 10 სმ-ისა და 18 სმ-ის სიგრძის ნაწილებად.

6.105. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი შუაზე ყოფს ტრაპეციის ბლაგვ კუთხეს. ტრაპეციის მცირე ფუძე 3 სმ-ის ტოლია, ხოლო ტრაპეციის პერიმეტრია 42 სმ. იპოვეთ შუახაზი.

6.106. იპოვეთ $ABCD$ ტრაპეციის AD დიდი ფუძე, თუ AC დიაგონალი CD გვერდის პერპენდიკულარულია და BAD კუთხეს შუაზე ყოფს; $\angle CDA = 60^\circ$. ტრაპეციის პერიმეტრია – 2.

6.107. მართკუთხა ტრაპეციაში ერთი კუთხე უდრის 135° -ს, შუამონაკვეთი 18 სმ-ს, ხოლო ფუძეების შეფარდებაა 1:8. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფერდი.

6.108. მართკუთხა ტრაპეცია დიაგონალით იყოფა ორ სამკუთხედად, რომელთაგან ერთი ტოლგვერდია 8 სმ-ის ტოლი გვერდით. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთი.

6.109. ტრაპეციის დიაგონალი მისი ფუძეების პერპენდიკულარულია; დიდ ფუძესთან მდებარე ბლაგვი კუთხე უდრის 120° -ს, ხოლო მასთან მიმდებარე ვერტიკალი – 7° -ს, დიდი ფუძე 12 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთის სიგრძე.

6.110. ჩახაზული ოთხკუთხედის 3 კუთხე (მიმდევრობით) ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2:3. იპოვეთ ოთხკუთხედის კუთხეები.

6.111. წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის ორი კუთხე არის 75° და 55° . იპოვეთ დანარჩენი ორი კუთხე.

6.112. მართკუთხედის დიაგონალი გვერდთან 12° -იან კუთხეს ქმნის. როგორ ოთხ ნაწილად იყოფა მართკუთხედის წვეროებით მასზე შემოხაზული წრეწირი?

6.113. $ABCD$ ჩახაზულ ოთხკუთხედში AC დიაგონალი BD დიაგონალის პერპენდიკულარულია და მას შუაზე ყოფს. იპოვეთ ამ ოთხკუთხედის კუთხეები, თუ $\angle BAD = 70^\circ$.

6.114. წრეწირში ჩახაზული ტრაპეციის ფუძეები ჭიმავს 120° -იან და 20° -იან რკალებს. იპოვეთ ტრაპეციის კუთხეები.

6.115. $ABCD$ ოთხკუთხედში B და D კუთხეები მართია. AC დიაგონალი AB გვერდთან შეადგენს 40° -იან კუთხეს, AD გვერდთან კი 30° -იანს. იპოვეთ მახვილი კუთხე AC და BD დიაგონალებს შორის.

6.116. $ABCD$ ოთხკუთხედში $\angle ABC = 116^\circ$, $\angle ADC = 64^\circ$, $\angle CAB = 35^\circ$ და $\angle CAD = 52^\circ$. იპოვეთ დიაგონალებს შორის მოთავსებული კუთხეები.

6.117. წრეწირი ჩახაზულია რომში. როგორ ოთხ ნაწილად ყოფს წრეწირს გვერდების შეხების წერტილები, თუ რომბის მახვილი კუთხე უდრის 37° ?

6.118. მართკუთხედის მცირე გვერდი 10 სმ-ის ტოლია. დიაგონალებს შორის კუთხე ტოლია 120° -ის. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

6.119. რომბის გვერდი უდრის 8 სმ-ს, ხოლო მახვილი კუთხე 30° -ს. იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

6.120. სამი მომდევნო გვერდი ოთხკუთხედისა, რომელშიც შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა, ტოლია 6 სმ-ის, 8 სმ-ის და 9 სმ-ის. იპოვეთ ამ ოთხკუთხედის პერიმეტრი.

6.121. შემოხაზული ოთხკუთხედის სამი გვერდი (მიმდევრობით) ისე შეუფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2:3. იპოვეთ გვერდები, თუ ცნობილია, რომ მისი პერიმეტრი უდრის 24 მ-ს.

6.122. წრეწირზე შემოხაზულია ტრაპეცია, რომლის პერიმეტრი უდრის 12 სმ-ს. იპოვეთ ამ ტრაპეციის შუამონაკვეთი.

6.123. წრეწირზე შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ერთი კუთხე უდრის 30° -ს. მისი შუამონაკვეთი უდრის 1 მ-ს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

6.124. მართკუთხა ტრაპეციაში ჩახაზულია 9 სმ რადიუსის მქონე წრეწირი. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთი, თუ ტრაპეციის მახვილი კუთხე 30° -ის ტოლია.

6.125. მართკუთხა ტრაპეციაში ჩახაზულია 6 სმ რადიუსის მქონე წრეწირი. იპოვეთ ტრაპეციის მახვილი კუთხე, თუ ტრაპეციის შუამონაკვეთია 18 სმ?

6.126. ტრაპეციის ერთი კუთხე 60° -ია, ხოლო ფერდების გაგრძელებები იკვეთებიან მართი კუთხით. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფერდი, თუ ტრაპეციის შეახაზი 8 სმ-ია, ხოლო ერთ-ერთი ფუძეა 6 სმ.

ამოცანები დამტკიცებაზე

6.127. შესაძლებელია თუ არა სამკუთხედი ასეთი გვერდებით: 1) 5 მ; 10 მ; 12 მ; 2) 1 მ; 2 მ; 3,3 მ; 3) 1,2 მ; 1 მ; 2,2 მ?

6.128. შეიძლება თუ არა სამკუთხედის გვერდი ტოლი იყოს 52 მმ-ის და პერიმეტრი იყოს 100 მმ?

6.129. ტოლფერდა სამკუთხედის ორი გვერდი ტოლია: 1) 2 სმ და 6 სმ; 2) 15 სმ და 14 სმ; 3) 8 სმ და 1 დმ; 4) 3 დმ და 10 სმ. ამ გვერდებიდან რომელი შეიძლება იყოს ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე.

6.130. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის თითოეული გვერდი მისი პერიმეტრის ნახევარზე ნაკლებია.

6.131. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის შიგნით მდებარე წერტილიდან ამ სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილების ჯამი პერიმეტრის ნახევარზე მეტია.

6.132. ABC სამკუთხედის ($AC > BC$) C კუთხის ბისექტრისაზე აღებულია M წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ AC და CB გვერდების სხვაობა მეტია AM და BM მონაკვეთების სხვაობაზე.

6.133. შესაძლებელია თუ არა ისეთი ოთხკუთხედი, რომლის გვერდების შეფარდება იყოს 2:3:4:10?

6.134. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედში ერთ გვერდთან მდებარე ორი კუთხის ბისექტრისები აღგენენ კუთხეს, რომელიც დანარჩენი ორი კუთხის ნახევარჯამის ტოლია.

6.135. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედის თითოეული დიაგონალის სიგრძე მის ნახევარპერიმეტრზე ნაკლებია.

6.136. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის მედიანა ნაკლებია იმ გვერდების ნახევარჯამზე, რომელთა შორისაც ის არის მოთავსებული.

6.137. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

6.138. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამში ბლაგვი კუთხის წვეროდან გაყვებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე პარალელოგრამის მახვილი კუთხის ტოლია.

6.139. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამში მახვილი კუთხის წვეროდან გაყვებულ სიმაღლეებს შორის კუთხე პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის ტოლია.

6.140. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის მედიანების ჯამი მეტია სამკუთხედის პერიმეტრის $\frac{3}{4}$ -ზე და ნაკლებია მის პერიმეტრზე.

6.141. $ABCD$ პარალელოგრამის BC და CD გვერდებზე, გარედან აგებულია BCM და CDN ტოლგვერდა სამკუთხედები. დაამტკიცეთ, რომ A , M და N წერტილები ტოლგვერდა სამკუთხედის წვეროებია.

6.142. დაამტკიცეთ, რომ პარალელოგრამის (რომელიც რომბს არ წარმოადგენს) შიგა კუთხეების ბისექტრისები ურთიერთგადაკვეთისას ქმნიან მართკუთხედს, რომლის დიაგონალი პარალელოგრამის მოსაზღვრე გვერდების სხვაობის ტოლია.

6.143. მოცემულია $ABCD$ კვადრატი. მის ყოველ გვერდზე გადაებულია ტოლი მონაკვეთები: $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. დაამტკიცეთ, რომ $A_1B_1C_1D_1$ ოთხკუთხედი კვადრატი.

6.144. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების დიამეტრთა ჯამი უდრის კათეტების ჯამს.

6.145. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსი სამკუთხედის ნახევარპერიმეტრისა და პიპიტენუსის სხვაობის ტოლია.

6.146. ABC მართკუთხა სამკუთხედში BD არის მართი კუთხის წვეროდან პიპიტენუსაზე დაშვებული სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ BD უდრის ABC , ABD და BCD სამკუთხედებში ნახაზული წრეწირების რადიუსების ჯამს.

6.147. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები პარალელოგრამის წვეროებია.

6.148. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის გვერდების შუაწერტილები რომბის წვეროებია და პირიქით, რომბის გვერდების შუაწერტილები მართკუთხედის წვეროებია.

6.149. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ტოლია, მაშინ გვერდების შუაწერტილების მიმდევრობით შეერთებით, მიღებული ოთხკუთხედი რომბია.

6.150. $ABCD$ ოთხკუთხედში $AB=BC$ და $CD=AD$. ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მიმდევრობით. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ოთხკუთხედი მართკუთხედს წარმოადგენს.

6.151. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედი ტოლფერდაა, თუ მას ორი მედიანა ტოლია აქვს.

6.152. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდისადმი გავლებული მედიანა ფუძესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს, მაშინ სამკუთხედი ტოლგვერდაა.

6.153. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფერდების ჯამი მეტია ფუძეთა სხვაობაზე.

6.154. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტრაპეციის ფუძეთა შუაწერტილების შემაერთებული მონაკვეთი ფუძეთა პერპენდიკულარულია, მაშინ ტრაპეცია ტოლფერდაა.

6.155. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტრაპეციის ფერდი უდრის ფუძეს, მაშინ მათი ბოლოების შემაერთებული დიაგონალი წარმოადგენს მეორე ფუძესთან მდებარე კუთხის ბისექტრისას.

6.156. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის დიაგონალების შუაწერტილების შემაერთებული მონაკვეთი ფუძეების პარალელურია და მათი სხვაობის ნახევარს უდრის.

6.157. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფერდთან მდებარე კუთხეების ბისექტრისები გადაკვეთისას მართ კუთხეს ადგენს და მათი გადაკვეთის წერტილი ტრაპეციის შუამონაკვეთზეა მდებარე.

6.158. $ABCD$ ტრაპეციაში $AD \parallel BC$ და $AD=2BC$. D წვეროდან AB წრფეზე დაშვებული მართობის ფუძეა K წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $KC=DC$.

6.159. შეიძლება თუ არა შემოიხაზოს წრეწირი ისეთ ოთხკუთხედზე, რომლის კუთხეები მიმდევრობით ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1) $2:4:5:3$? 2) $5:7:8:9$?

6.160. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ოთხკუთხედში ედთ-ერთი დიაგონალი ჰყოფს მის ორ კუთხეს შუაზე, მაშინ ასეთ ოთხკუთხედში შეიძლება წრეწირის ჩახაზვა.

6.161. ორი წრეწირის გადაკვეთის A და B წერტილებზე გამავალი მკვეთები ერთ წრეწირს გადაკვეთენ C და D წერტილებში, ხოლო მეორეს — M და N წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ CD და MN ქორდები პარალელურია.

§7. ფიგურათა მსგავსება

ამოცანები გამოთვლაზე

7.1. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:5:6. იპოვეთ მისი მსგავსი სამკუთხედის გვერდები, თუ ამ უკანასკნელის უმცირესი გვერდი 0,8 მ-ია.

7.2. სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:5:4. იპოვეთ მისი მსგავსი სამკუთხედის გვერდები, თუ ამ უკანასკნელის პერიმეტრი 55 მ-ია.

7.3. სამკუთხედის გვერდები 0,8 მ, 1,6 მ და 2 მ-ია. იპოვეთ მისი მსგავსი სამკუთხედის გვერდები, თუ ამ უკანასკნელის პერიმეტრი 5,5 მ-ია.

7.4. ერთი სამკუთხედის პერიმეტრი მისი მსგავსი მეორე სამკუთხედის პერიმეტრის $\frac{11}{13}$ -ს შეადგენს. ორი შესაბამისი გვერდის სხვაობა 1 მ-ია. იპოვეთ ეს გვერდები.

7.5. მსგავსი სამკუთხედების პერიმეტრები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 10:9. ერთი სამკუთხედის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 6:7:8. იპოვეთ ორივე სამკუთხედის გვერდები, თუ სამკუთხედების უმცირესი გვერდების ჯამი 38 სმ-ის ტოლია.

7.6. ოთხკუთხედის გვერდებია 14 სმ, 21 სმ, 10 სმ და 42 სმ. იპოვეთ მისი მსგავსი ოთხკუთხედის გვერდები, თუ მისი უმცირესი გვერდი 2 სმ-ის ტოლია.

7.7. ერთი ოთხკუთხედის გვერდებია 10 დმ, 15 დმ, 20 დმ და 25 დმ. მისი მსგავსი ოთხკუთხედის უდიდესი და უმცირესი გვერდების ჯამი 28 დმ-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე ოთხკუთხედის გვერდები.

7.8. ორი მსგავსი მრავალკუთხედის უდიდესი გვერდებია 35 მ და 14 მ, ხოლო მათი პერიმეტრების სხვაობა 60 მ-ის ტოლია. იპოვეთ თითოეული მრავალკუთხედის პერიმეტრი.

7.9. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 8 და 50, ფერდი კი — 42. ფუძის პარალელური წრფე ტრაპეციას ორ მსგავს ტრაპეციად ყოფს. იპოვეთ უმცირესი მათგანის პერიმეტრი.

7.10. *A* კუთხის გვერდები გადაკვეთილია *BC* და *DE* ორი პარალელური წრფით (*B* და *D* წერტილები ძვეს კუთხის ერთ გვერდზე, *C* და *E* – მეორე გვერდზე). იპოვეთ:

- 1) *AE*, თუ $AB=8$ მ, $AD=12$ მ, $AC=10$ მ;
- 2) *AD*, თუ $AC:AE=2:5$ და $BD=12$ დმ;
- 3) *AB*, თუ $AB+AD=21$ მ, $AC=12$ მ და $AE=16$ მ.

7.11. ორი ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდებს შორის მდებარე კუთხეები ტოლია. ერთი სამკუთხედის ფერდი და ფუძე შესაბამისად 17 სმ-ს და 10 სმ-ს უდრის, მეორე სამკუთხედის ფუძე 8 სმ-ია. იპოვეთ მისი ფერდი.

7.12. ორ ტოლფერდა სამკუთხედში წვეროსთან მდებარე კუთხეები ტოლია. პირველი სამკუთხედის პერიმეტრია 544 მ. იპოვეთ მისი გვერდები, თუ მეორე სამკუთხედის ორი გვერდი ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2.

7.13. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფერდი უდრის 100 და ფუძე 20-ს, ნახაზულია წრეწირი. იპოვეთ მანძილი ფერდებზე მოთავსებულ შეხების წერტილებს შორის.

7.14. *ABC* სამკუთხედის *AB* გვერდზე აღებული *D* წერტილზე გავლებული *AC* გვერდის პარალელური წრფე *BC* გვერდს კვეთს *F* წერტილში. იპოვეთ *BF* მონაკვეთი, თუ $AD:DB=5:6$, $BC=22$ სმ.

7.15. *ABC* ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა 12 სმ, ხოლო ფერდი 18 სმ. *AB* და *BC* ფერდებზე აღებულია *M* და *N* წერტილები ისე, რომ $BM=BN$. იპოვეთ *BM* მონაკვეთის სიგრძე, თუ *AMNC* ოთხკუთხედის პერიმეტრი 40 სმ-ია.

7.16. *BCD* მართკუთხა სამკუთხედში მართი *D* კუთხის წვეროზე გავლებული *BC* პიპოტენუზის პარალელური წრფე და *B* წვეროზე გავლებული *BC*-ს პერპენდიკულარული წრფე იკვეთებიან *A* წერტილში. *BD* კათეტი 12 სმ-ია, *BC* პიპოტენუზა კი 18 სმ. იპოვეთ *AD*.

7.17. *ABC* სამკუთხედის *AD* და *BE* სიმაღლეები იკვეთებიან *O* წერტილში. $AD+BE=35$ დმ, $AO=9$ დმ, $BO=12$ დმ. იპოვეთ *OE* და *OD*.

7.18. *ABC* სამკუთხედში *C* კუთხე მართია; $AC=6$ სმ, $BC=12$ სმ; *BC* გვერდზე აღებულია *D* წერტილი ისე, რომ $\angle ADC=90^\circ - \angle B$. როგორ ნაწილებად ეოფს *D* წერტილი *BC* გვერდს?

7.19. *ABC* სამკუთხედში გავლებულია *BD* წრფე ისე, რომ $\angle BDC = \angle ABC$. *AC* გვერდზე მიღებულია მონაკვეთები *AD* და *DC*. იპოვეთ *BC*, თუ $AD=9$ და $DC=16$.

7.20. ABC სამკუთხედში გავლებულია BD წრფე ისე, რომ $\angle ABD = \angle BCA$. AC გვერდზე მიღებულია მონაკვეთები AD და DC . იპოვეთ DC , თუ $AB=8$ და $AC=10$.

7.21. ბლაგოკუთხა ტოლფერდა ABC სამკუთხედში ფუძე $AC=32$ მ, ფერდი კი 20 მ-ია. B წვეროდან ფერდისადმი გავლებული პერპენდიკულარი ფუძეს კვეთს D წერტილში. როგორ ნაწილებად ეოფს ის ფუძეს?

7.22. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში, რომლის ფუძეა AC და მისი მოპირდაპირე კუთხეა 36° , გავლებულია AD ბისექტრისა. იპოვეთ AC , თუ ფერდია a .

7.23. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კათეტებია a და b , ნახაზულია კვადრატი, რომელსაც სამკუთხედთან აქვს საერთო მართი კუთხე. იპოვეთ კვადრატის პერიმეტრი.

7.24. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კათეტია 9 სმ, ხოლო მასთან მდებარე მახვილი კუთხეა 60° , ნახაზულია რომბი ისე, რომ 60° -იანი კუთხე მათ საერთო აქვთ. იპოვეთ რომბის გვერდი.

7.25. ABC სამკუთხედში ნახაზულია $ADEF$ რომბი ისე, რომ A მათი საერთო კუთხეა და E წვერო BC გვერდზეა. იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ $AB=c$ და $AC=b$.

7.26. რომბის წვეროზე გავლებული წრფე რომბის ორი გვერდის გაგრძელებას ნამოჭრის p და q მონაკვეთებს. იპოვეთ რომბის გვერდი.

7.27. სამკუთხედში ნახაზულია პარალელოგრამი ისე, რომ მათ ერთი კუთხე საერთო აქვთ. სამკუთხედის გვერდების სიგრძეები, რომლებიც ამ კუთხეს შეადგენენ, ტოლია 15 -ის და 10 -ის, ხოლო პარალელოგრამის ის გვერდები, რომლებიც სამკუთხედის აღნიშნული გვერდების პარალელურია, ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც $3:2$. იპოვეთ პარალელოგრამის პერიმეტრი.

7.28. $ABCD$ პარალელოგრამში გვერდი $AB=420$ მ. BC გვერდზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $BE:EC=5:7$ და გავლებულია DE წრფე, რომელიც AB -ს გაგრძელებას F წერტილში კვეთს. იპოვეთ BF .

7.29. პარალელოგრამის პერიმეტრი 96 -ია. მისი თითოეული დიაგონალი გაყოფილია სამ ტოლ მონაკვეთად. იპოვეთ იმ ოთხკუთხედის პერიმეტრი, რომლის წვეროები დაყოფის წერტილებია.

7.30. ორი წრეწირი ერთმანეთს გარედან ეხება. შეხების წერტილზე გავლებული წრფე წარმოშობს წრეწირებში ქორ-

დებს, რომელთაგან ერთი შეადგენს მეორის $\frac{5}{13}$ -ს. იპოვეთ

რადიუსები, თუ მანძილი ცენტრებს შორის უდრის 36 სმ-ს.

7.31. ორი წრეწირი ერთმანეთს შიგნიდან ეხება. შეხების წერტილზე გავლებული წრფე წარმოშობს წრეწირებში ქორდებს, რომელთაგან ერთი 3-ჯერ მეტია მეორეზე. იპოვეთ რადიუსები, თუ მანძილი ცენტრებს შორის უდრის 8 სმ-ს.

7.32. ორი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 3 სმ და 1 სმ, ერთმანეთს ეხება გარედან. იპოვეთ მანძილი შეხების წერტილიდან წრეწირთა საერთო გარე მხეზამდე.

7.33. მანძილი იმ წრეწირების ცენტრებს შორის, რომელთა რადიუსებია 17 და 10, ტოლია 21-ის. გამოთვალეთ მანძილი პატარა წრეწირის ცენტრიდან საერთო გარე მხეზთა გადაკვეთის წერტილამდე.

7.34. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრია 36 სმ. ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის შეაწერტილზე გავლებულია ერთ-ერთი ფერდის პარალელური წრფე. იპოვეთ მოკვეთილი სამკუთხედის პერიმეტრი.

7.35. CD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. E წერტილი BC -ზე ძევს და ამასთანავე $DE \parallel AC$. იპოვეთ DE , თუ $BC=a$ და $AC=b$.

7.36. სამკუთხედში, რომლის ფუძე არის a და სიმაღლე h , ნახაზულია კვადრატი ისე, რომ მისი ორი წვერო ძევს სამკუთხედის ფუძეზე, ორი სხვა კი — ფერდებზე. იპოვეთ კვადრატის გვერდი.

7.37. სამკუთხედში, რომლის ერთი გვერდი 48 სმ-ია და ამ გვერდისადმი გავლებული სიმაღლე 16 სმ, ნახაზულია მართკუთხედი, რომლის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:9; ამასთანავე, მართკუთხედის უდიდესი გვერდი სამკუთხედის მოცემულ გვერდზე ძევს. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

7.38. ABC სამკუთხედში, რომლის AC გვერდი 30 სმ-ია და BD სიმაღლე 10 სმ, ნახაზულია მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედი ისე, რომ მისი ჰიპოტენუზა AC -ს პარალელურია და მართი კუთხის წვერო AC გვერდზე ძევს. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

7.39. ABC სამკუთხედში ნახაზულია ნახევარწრეწირი, რომელიც AC გვერდს ეხება, დიამეტრი კი (მისი ბოლოები AB და BC გვერდებზეა) AC გვერდის პარალელურია. იპოვეთ რადიუსი, თუ AC გვერდი უდრის a -ს და BD სიმაღლე h -ს.

7.40. მართკუთხა სამკუთხედზე შემოხაზულია წრეწირი. პიპიტენუხის ბოლოებიდან მართი კუთხის წვეროზე გავლებულ მხებადღე მანძილგებია 4 და 1. იბოვეთ კათეტები.

7.41. სამკუთხედის 120°-იან კუთხის შემადგენელი გვერდებია 6 სმ და 12 სმ. იბოვეთ ამ კუთხის ბისექტრისა.

7.42. $ABCD$ ტრაპეციის AB და CD ფერდღბის გაგრძელღებები E წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს. იბოვეთ AED სამკუთხედის გვერდები, თუ $AB=5$ სმ, $BC=10$ სმ, $CD=6$ სმ, $AD=15$ სმ.

7.43. $ABCD$ ტრაპეციის AB და CD ფერდღბის გაგრძელღებები E წერტილში გადაკვეთს ერთმანეთს. იბოვეთ AED სამკუთხედის E წვეროდან დაშვებული სიმაღღღე, თუ $BC=7$ სმ, $AD=21$ სმ, ტრაპეციის სიმაღღღე კი 3 სმ-ია.

7.44. O არის $ABCD$ ტრაპეციის ($BC \parallel AD$) დიაგონაღღების გადაკვეთის წერტიღღი. იბოვეთ OB , თუ $AO=6$, $OC=4$ და $BD=13$.

7.45. ტრაპეციის დიაგონაღღების გადაკვეთის წერტიღღით ერთ-ერთი დიაგონაღღი იყოფა მონაკვეთებად, რომღღებიც ისღე შეეფარღღებიან ერთმანეთს, როგორც 9:20. იბოვეთ ტრაპეციის ფუძღები, თუ მისი შუამონაკვეთი უღღრის 29 სმ-ს.

7.46. $ABCD$ ტრაპეციაში ($BC \parallel AD$) $\angle ABD = \angle BCD$. იბოვეთ AB , თუ $BC=1$, $DC=1.5$, $BD=2$.

7.47. $ABCD$ ტრაპეციაში $\angle ABC = \angle ACD$. იბოვეთ AC დიაგონაღღი, თუ ფუძღები BC და AD შესაბამისად უღღრის 2-სა და 8-ს.

7.48. წრფღე, რომელიც ტრაპეციის დიაგონაღღების გადაკვეთის წერტილზე გაღღის, ერთ-ერთ ფუძღს $m:n$ შეფარღღებით ყოფს, რა შეფარღღებით ყოფს იგი მეორღე ფუძღს?

7.49. ტრაპეციის ფუძღების პარაღღღელური წრფღე ტრაპეციის ფერღღს ყოფს შეფარღღებით 3:7 მცირღე ფუძღის მხრიდან. იბოვეთ ფერღღებს შორის მოქცეული მონაკვეთის სიგრძღე, თუ ტრაპეციის ფუძღებია 2 და 5.

7.50. $ABCD$ ტრაპეციაში BD მცირღე დიაგონაღღი AD და BC ფუძღების პერპენდიკულარულია; A და C მახვიღღი კუთხეღღების ჯამი უღღრის 90°-ს. $AD=9$ და $BC=4$. იბოვეთ BD .

7.51. ტრაპეციის ფუძღებია 24 სმ და 48 სმ. იბოვეთ ტრაპეციაში მოქცეული მონაკვეთის სიგრძღე, რომელიც ფუძღების პარაღღღელურია და გაღღის დიაგონაღღების გადაკვეთის წერტილზე.

7.52. ტრაპეციის ფუძღების სიგრძღებია 6 და 1.5. დიღღი ფუძღის შუაწერტიღღის მცირღე ფუძღის წვეროებთან შემაერთებული წრფღე-ები ტრაპეციის დიაგონაღღებს გადაკვეთენ M და N წერტიღღებში. იბოვეთ MN .

7.53. ურთიერთგადაშვებით ორი ქორდიდან გადაკვეთის წერტილით ერთი გაყოფილია შუაზე, მეორე კი 48 სმ-ისა და 3 სმ-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ პირველი ქორდის სიგრძე.

7.54. ურთიერთგადაშვებით ორი ქორდიდან გადაკვეთის წერტილით ერთი გაყოფილია 12 მ-ისა და 18 მ-ის ტოლ ნაწილებად, მეორე კი შეფარდებით 3:8. იპოვეთ მეორე ქორდის სიგრძე.

7.55. ურთიერთგადაშვებით ორი ქორდიდან პირველი უდრის 32 სმ-ს. მეორე ქორდის მონაკვეთებია 12 სმ და 16 სმ. იპოვეთ პირველი ქორდის მონაკვეთები.

7.56. *P* წერტილი 11 სმ რადიუსის მქონე წრეწირის ცენტრიდან დაშორებულია 7 სმ-ით. ამ წერტილზე გავლებულია 18 სმ სიგრძის ქორდა. იპოვეთ მონაკვეთები, რომლებმაც ყოფს ქორდას *P* წერტილი.

7.57. წრეწირის წერტილიდან მის დიამეტრზე დაშვებულია პერპენდიკულარი. იპოვეთ ამ პერპენდიკულარის სიგრძე, თუ დიამეტრის მონაკვეთებია 1) 12 სმ და 3 სმ; 2) 16 სმ და 9 სმ; 3) 2 მ და 5 დმ.

7.58. დიამეტრის წერტილზე მისაღმი გავლებულია პერპენდიკულარი წრეწირთან გადაკვეთამდე. იპოვეთ ამ პერპენდიკულარის სიგრძე, თუ დიამეტრი უდრის 40 სმ, პერპენდიკულარი კი დიამეტრის ერთი ბოლოდან დაშორებულია 8 სმ-ით.

7.59. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ ფუძე უდრის 16 სმ-ს და სიმაღლე 4 სმ-ს.

7.60. წრეწირისაღმი ერთი წერტილიდან გავლებულია მკვეთი და მხეზი. იპოვეთ მხეზის მონაკვეთის სიგრძე, თუ მკვეთის გარე და შიგა მონაკვეთები, შესაბამისად გამოისახება შემდეგი რიცხვებით: 1) 4 და 5; 2) 2,25 და 1,75; 3) 1 და 2.

7.61. მხეზის მონაკვეთის სიგრძე 20 სმ-ია, ხოლო იმავე წერტილიდან გავლებული უდიდესი მკვეთი უდრის 50 სმ-ს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

7.62. ერთი წერტილიდან წრეწირისაღმი გავლებულია მხეზი და მკვეთი. იპოვეთ მხეზის მონაკვეთის სიგრძე, თუ ის 5 სმ-ით მეტია მკვეთის გარე მონაკვეთზე და იმდენითვე ნაკლებია შიგა მონაკვეთზე.

7.63. ერთი წერტილიდან წრეწირისაღმი გავლებულია მხეზი და მკვეთი. მხეზის მონაკვეთი მეტია მკვეთის შიგა და გარე მონაკვეთებზე შესაბამისად 2 სმ-ითა და 4 სმ-ით. იპოვეთ მკვეთის სიგრძე.

7.64. მოცემული წერტილიდან გავლებულია მკვეთი და 20 სმ სიგრძის მქონე მხეზი. იპოვეთ მკვეთის სიგრძე, თუ მისი გარე ნაწილი ისე შეფარდება შიგა ნაწილს, როგორც 4:5.

7.65. ერთი წერტილიდან გავლებულია წრეწირის მკვეთი და მხები. მათი ჯამი უდრის 30 სმ-ს, ხოლო მკვეთის შიგა მონაკვეთი 2 სმ-ით ნაკლებია მხებზე. იპოვეთ მკვეთისა და მხების სიგრძე.

7.66. A წერტილიდან გავლებულია ორი მკვეთი, რომლებიც წრეწირს გადაკვეთენ: პირველი – D და B წერტილებში, მეორე – E და C წერტილებში. იპოვეთ:

- 1) AE , თუ $AD=5$ სმ, $DB=15$ სმ და $AC=25$ სმ;
- 2) BD , თუ $AB=24$ მ, $AC=16$ მ და $EC=10$ მ;
- 3) AB და AC , თუ $AB+AC=50$ მ, ხოლო $AD:AE=3:7$.

7.67. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი მკვეთი. პირველის შიგა მონაკვეთი უდრის 47 მ, გარე მონაკვეთი – 9 მ, ხოლო მეორის შიგა მონაკვეთი 72 მ-ით მეტია მისივე გარე მონაკვეთზე. იპოვეთ მეორე მკვეთის სიგრძე.

7.68. წრეწირის რადიუსი უდრის 7 სმ-ს. ცენტრიდან 9 სმ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია მკვეთი ისე, რომ ის წრეწირით შუაზე იყოფა. იპოვეთ მკვეთის სიგრძე.

ამოცანები დამტკიცებაზე

7.69. ABC სამკუთხედში გავლებულია AE და BD სიმაღლეები. დაამტკიცეთ, რომ C , D და E წერტილები ABC სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედის წევრებია.

7.70. ტრაპეციის დიაგონალთა გადაკვეთის წერტილზე გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული ტრაპეციების სიმაღლეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც ტრაპეციის ფუძეები.

7.71. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერი $ABCD$ ტრაპეციისათვის მართებულია ტოლობა $AO \cdot BO = DO \cdot CO$, სადაც O არის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი.

7.72. ABC სამკუთხედის AA_1 , BB_1 და CC_1 სიმაღლეები K წერტილში იკვეთება. დაამტკიცეთ, რომ $AK \cdot A_1K = BK \cdot B_1K = CK \cdot C_1K$.

7.73. $ABCD$ ოთხკუთხედის დიაგონალები M წერტილში იკვეთებიან. დაამტკიცეთ, რომ ოთხკუთხედზე შეიძლება შემოიხაზოს წრეწირი, თუ $AM \cdot CM = BM \cdot DM$.

7.74. ურთიერთგადამკვეთი ორი წრეწირის საერთო ქორდა გაგრძელებულია და გაგრძელებაზე აღებული წერტილიდან

წრეწირებისადმი გავლებულია მხეხები. დაამტკიცეთ, რომ ისინი ტოლია.

7.75. ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილზე გავლებულია ფუძეების პარალელური წრფე. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის გვერდების მიერ ამ წრფიდან მოკვეთილ მონაკვეთს O წერტილი შუაზე ყოფს.

7.76. $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებზე მის გარეთ აგებულია BMC და AND ტოლგვერდა სამკუთხედები. დაამტკიცეთ, რომ MN წრფე ტრაპეციის დიაგონალთა გადაკვეთის წერტილზე გადის.

7.77. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფერდების გაგრძელებები და მისი ფუძეების შუაწერტილების შემაერთებული წრფე ერთ წერტილში იკვეთება.

7.78. დაამტკიცეთ, რომ წრფეები, რომლებიც აერთებენ შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის მოპირდაპირე გვერდების შეხების წერტილებს, მისი დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გადიან.

7.79. $ABCD$ პარალელოგრამში M და N შესაბამისად BC და CD გვერდების შუაწერტილებია. დაამტკიცეთ, რომ AM და AN წრფეებით BD დიაგონალი სამ ტოლ ნაწილად იყოფა.

7.80. კუბით $ABCD$ ოთხკუთხედის AB და CD გვერდების შემცველი წრფეების გადაკვეთის წერტილია S . დაამტკიცეთ, რომ თუ $SB \cdot SA = SC \cdot SD$, მაშინ $ABCD$ ოთხკუთხედზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა.

7.81. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ორი გვერდის ნამრავლი, მესამე გვერდისადმი გავლებული სიმაღლისა და სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრის ნამრავლის ტოლია.

7.82. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის კუთხის ბისექტრისის კვადრატი უდრის ამ კუთხის შემადგენელი გვერდების ნამრავლისა და ბისექტრისასთან მესამე გვერდის გადაკვეთით მიღებული მონაკვეთების ნამრავლის სხვაობას.

7.83. წრეწირის ცენტრი $ABCD$ ოთხკუთხედის AD გვერდის O შუაწერტილში ძევს და ეხება დანარჩენ სამ გვერდს. დაამტკიცეთ, რომ $\triangle ABO$ მსგავსია $\triangle DOC$ -სი და $AD = 2\sqrt{ab}$, ხოლო $AB = a$ და $CD = b$.

§8. პითაგორას თეორემა

ამოცანები გამოთვლაზე

8.1. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის პიპოტენუსა ორი კათეტით:

ა) $a=3$, $b=4$;

ბ) $a=9$, $b=40$;

გ) $a=20$, $b=21$;

დ) $a=11$, $b=60$.

8.2. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი ჰიპოტენუსითა და მეორე კათეტით:

ა) $c=13$, $a=5$;

ბ) $c=25$, $a=7$;

გ) $c=17$, $a=8$;

დ) $c=85$, $a=84$.

8.3. მართკუთხედის გვერდები 60 სმ და 91 სმ-ია. რას უდრის დიაგონალი?

8.4. სამკუთხედის გვერდები 30 სმ და 25 სმ-ია. ხოლო მესამე გვერდზე დაშვებული სიმაღლე – 24 სმ. იპოვეთ მესამე გვერდი.

8.5. სამკუთხედის სიმაღლე გვერდს 20 სმ-ის და 21 სმ-ის ტოლ ნაწილებად ყოფს. ამ გვერდთან მდებარე ერთ-ერთი კუთხე 45° -ია. იპოვეთ სამკუთხედის ამ კუთხის მოპირდაპირე გვერდი.

8.6. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუსა უდრის a -ს. იპოვეთ კათეტი.

8.7. კვადრატის დიაგონალია a . იპოვეთ კვადრატის გვერდი.

8.8. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდია a . იპოვეთ სიმაღლე.

8.9. ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდი 17 სმ-ია, ხოლო ფუძე – 16 სმ. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.

8.10. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე უდრის 4 სმ-ს. მასთან მდებარე კუთხე კი უდრის 45° -ს. იპოვეთ ფერდი.

8.11. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის გვერდები, თუ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე უდრის 35 სმ-ს, ხოლო ფუძე ისე შეეფარდება ფერდს, როგორც 48:25.

8.12. ტოლფერდა სამკუთხედის პერიმეტრი 64 სმ-ია, ხოლო მისი ფერდი ფუძეზე 11 სმ-ით მეტია. იპოვეთ ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე.

8.13. იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ მისი დიაგონალებია: 1) 6 სმ და 8 სმ; 2) 16 დმ და 30 დმ; 3) 5 მ და 12 მ.

8.14. რომბი დიაგონალით იყოფა ორ ტოლგვერდა სამკუთხედად. იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ მასში ნახაზული წრეწირის რადიუსია 2.

8.15. იპოვეთ რომბის დიაგონალები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4, პერიმეტრი კი უდრის 1 მ.

8.16. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტი 5 მ-ია, ხოლო მისი გვერდილი ჰიპოტენუსაზე – 3 მ. იპოვეთ ჰიპოტენუსა და მეორე კათეტი.

8.17. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები, თუ ჰიპოტენუსაზე მათი გვერდილებია: 1) 9 სმ და 16 სმ; 2) 36 მ და 64 მ.

8.18. კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:6, ხოლო ჰიპოტენუზა უდრის 122 სმ. იპოვეთ ჰიპოტენუზის მონაკვეთები, რომლებიც სიმაღლის გავლებით შეიქმნება.

8.19. კათეტების შეფარდება უდრის 3:2, სიმაღლე კი ჰიპოტენუზას ეოფს ორ მონაკვეთად, რომელთაგან ერთი 2 მ-ით მეტია მეორეზე. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

8.20. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა, თუ მასზე დაშვებული სიმაღლე 20 სმ-ია და ჰიპოტენუზას ეოფს შეფარდებით 1:4.

8.21. კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:7. ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე კი უდრის 42 სმ-ს. იპოვეთ ჰიპოტენუზის მონაკვეთები.

8.22. მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტის შუაწერტილიდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებულია პერპენდიკულარი. იპოვეთ ჰიპოტენუზის მონაკვეთების სიგრძეთა კვადრატების სხვაობის აბსოლუტური ხიდიდე, თუ მეორე კათეტის სიგრძეა 7 სმ.

8.23. წრეწირის რადიუსი 5 მ-ია. ცენტრიდან 13 მ-ით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია წრეწირის მხები. იპოვეთ მხების მონაკვეთის სიგრძე.

8.24. AB დიამეტრია, AC – ქორდა; AD არის ქორდის გვემილი AB დიამეტრზე. იპოვეთ:

- 1) AD , თუ $AB=18$ სმ და $AC=12$ სმ;
- 2) რადიუსი, თუ $AC=12$ მ და $AD=4$ მ;
- 3) DB , თუ $AC=24$ სმ და $DB=\frac{7}{9}AD$.

8.25. მართკუთხედის გვერდებია 5 და 12. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

8.26. წრეწირში ნახაზულია მართკუთხედი, რომლის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 8:15. იპოვეთ ეს გვერდები, თუ წრეწირის რადიუსი 34 სმ-ია.

8.27. მართკუთხედის ორი წვერო წრეწირზე მდებარეობს, ხოლო დანარჩენი ორი – ამ წრეწირის დიამეტრზე. მართკუთხედის იმ გვერდის სიგრძე, რომელიც დიამეტრზე მდებარეობს 10 სმ-ია. იპოვეთ მეორე გვერდი, თუ წრეწირის რადიუსი 13 სმ-ია.

8.28. ნახევარწრეწირში ნახაზულია კვადრატის ისე, რომ მისი ერთი გვერდი დიამეტრზე მდებარეობს. იპოვეთ რადიუსი, თუ კვადრატის გვერდი 10 სმ-ია.

8.29. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები უდრის* 16 სმ და 12 სმ-ს. იპოვეთ ჰიპოტენუზის მედიანა.

8.30. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზის მედიანაა 5 სმ და იგი მართ კუთხეს ეოვს შეფარდებით 1:2. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

8.31. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსი, თუ კათეტებია 24 და 7.

8.32. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტები უდრის 15 სმ, ხოლო მეორე კათეტის გვერდული ჰიპოტენუზაზე უდრის 16 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსი.

8.33. მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა c -ს ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსი.

8.34. მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის შეხების წერტილი ჰიპოტენუზას ეოვს 5 სმ და 12 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

8.35. მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის შეხების წერტილი ჰიპოტენუზას ეოვს შეფარდებით 2:3. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ ნახაზული წრეწირის ცენტრი მართი კუთხის წვეროდან $\sqrt{8}$ სმ-ით არის დაშორებული.

8.36. იპოვეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსის შეფარდება ამავე სამკუთხედის ჰიპოტენუზისადმი გავლებულ სიმაღლესთან.

8.37. სამკუთხედში ნახაზულია წრეწირი, რომლის რადიუსი 3 სმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ ერთი მათგანი შეხების წერტილით გაყოფილია 4 სმ და 3 სმ ტოლ ნაწილებად.

8.38. ABC სამკუთხედში $AC=CB=8$ სმ. AC გვერდზე, როგორც დიამეტრზე, შემოხაზული წრეწირი CB გვერდს კვეთს E წერტილში ისე, რომ $CE:EB=3:1$. იპოვეთ AB გვერდი და AE მონაკვეთის სიგრძე.

8.39. ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალი უდრის 39 სმ-ს, ხოლო სიმაღლე – 15 სმ-ს. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთი.

8.40. ტოლფერდა ტრაპეციაში ფუძეები 10 სმ და 24 სმ-ია, ფერდი კი – 25 სმ; იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

8.41. ტოლფერდა ტრაპეციაში ფერდი 41 სმ-ია, სიმაღლე – 40 სმ, შუამონაკვეთი კი – 45 სმ. იპოვეთ ფუძეები.

8.42. მართკუთხა ტრაპეციის ფუძეებია 16 სმ და 10 სმ, მცირე ფერდი უდრის 8 სმ-ს. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი.

8.43. ტრაპეციის ფუძეებია 28 სმ და 16 სმ, ხოლო ფერდებია 25 სმ და 17 სმ. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

8.44. ტრაპეციაში, რომლის ფერდებია 4 და 6, ნახაზულია წრეწირი. იპოვეთ წრეწირის ცენტრიდან ტრაპეციის წვეროებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი.

8.45. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 20:21, ხოლო ამ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ნახაზული წრეწირების რადიუსების სხვაობა უდრის 17 სმ-ს.

8.46. ABC მართკუთხა სამკუთხედში AC კათეტი 12 სმ-ია. B კუთხის ბისექტრისის ამ კათეტთან გადაკვეთის D წერტილიდან ჰიპოტენუზისადმი გავლებული პერპენდიკულარი 4 სმ-ია. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

8.47. მართკუთხედის წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარის სიგრძეა 8 სმ და იგი დიაგონალს ეოფს შეფარდებით 14. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი.

8.48. მართკუთხედის ორი წვეროდან დიაგონალზე დაშვებული პერპენდიკულარები ამ დიაგონალს სამ ტოლ მონაკვეთად ეოფს. მართკუთხედის მცირე გვერდის სიგრძე არის $19\sqrt{2}$. იპოვეთ დიდი გვერდის სიგრძე.

8.49. წრეწირის რადიუსი უდრის 8 დმ-ს; AB ქორდა კი უდრის 12 დმ-ს. A წერტილზე გავლებულია მხები და B წერტილიდან – მისი პარალელური BC ქორდა. იპოვეთ მანძილი მხებსა და BC ქორდას შორის.

8.50. წრეწირის ქორდა არის 10 სმ. ამ ქორდის ერთ ბოლოზე გავლებულია მხები, ხოლო მეორეზე – კი მხების პარალელური ქორდა, რომლის სიგრძე 12 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

8.51. იპოვეთ ქორდის სიგრძე თუ წრეწირის რადიუსია 9 და მანძილი ქორდის ერთი ბოლოდან ქორდის მეორე ბოლოზე გავლებულ მხებაძღე უდრის 2-ს.

8.52. A წერტილი MN წრფიდან დაშორებულია 2 სმ-ით. წრეწირი, რომლის რადიუსი უდრის 16 სმ-ს, გადის A წერტილზე და ეხება MN წრფეს B წერტილში. იპოვეთ AB .

8.53. ტლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 20 სმ და 12 სმ. იპოვეთ ამ ტრაპეციის დიაგონალი და ფერდი, თუ ცნობილია, რომ შემოხაზული წრეწირის ცენტრი მდებარეობს დიდ ფუძეზე.

8.54. წერტილი დაშორებულია წრეწირის ცენტრიდან 25 სმ-ით. ამ წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი მხები. წრეწირის რადიუსი 7 სმ-ია. იპოვეთ მანძილი მხებების წერტილთა შორის.

8.55. ერთი წერტილიდან წრეწირისადმი გავლებულია ორი მხები. მხების სიგრძე უდრის 156 დმ-ს, მანძილი მხებების წერტილთა შორის კი 120 დმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

8.56. CD არის ABC მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე. D წერტილზე BC კათეტის პარალელურად

გავლებული წრფე AC -ს კვეთს E წერტილში. იპოვეთ $AE:EC$, თუ $AC:CB=4:5$.

8.57. AB და CD ორი პარალელური ქორდა, 15 სმ-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირის ცენტრის სხვადასხვა მხარეზეა მოთავსებული. იპოვეთ ამ ქორდებს შორის მანძილი, თუ $AB=18$ სმ, $CD=24$ სმ.

8.58. AB და CD ორი პარალელური ქორდა 30 სმ-ის ტოლი რადიუსის მქონე წრეწირის ცენტრის ერთ მხარეზეა მოთავსებული. იპოვეთ ამ ქორდებს შორის მანძილი, თუ $AB=48$ სმ, $CD=36$ სმ.

8.59. პარალელური ქორდების სიგრძეა 40 დმ და 48 დმ, მათ შორის მანძილი კი 22 დმ-ია. იპოვეთ რადიუსის სიგრძე.

8.60. მანძილები დიამეტრის ერთი ბოლოდან მისი პარალელური ქორდის ბოლოებამდე არის 13 სმ და 84 სმ. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

8.61. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a და ფერდი – b . იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

8.62. მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზა 34 სმ-ია, ხოლო კათეტი 16 სმ. იპოვეთ იმ პერპენდიკულარის სიგრძე, რომელიც ჰიპოტენუზისადმი აღმართული მისი შეაწერტილიდან კათეტთან გადაკვეთამდე.

8.63. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a და ფერდი – b . იპოვეთ ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

8.64. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე 10 სმ-ია და ფერდი – 13 სმ. იპოვეთ ჩახაზული და შემოხაზული წრეწირების რადიუსები.

8.65. AB არის წრეწირის დიამეტრი, BC მხებია. D არის AC წრფის წრეწირთან გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ რადიუსი, თუ $AD=32$ სმ, $DC=18$ სმ.

8.66. წრეწირი ეხება მართკუთხა სამკუთხედის დიდ კათეტს, გადის მთავრდაპირე მახვილი კუთხის წვეროზე და მისი ცენტრი მდებარეობს სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ კათეტებია 5 სმ და 12 სმ.

8.67. წრეწირისადმი საერთო წერტილიდან გავლებული მხები და მკვეთი ურთიერთპერპენდიკულარულია; მხები უდრის 12 სმ-ს, მკვეთის შიგა ნაწილი კი 10 სმ-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

8.68. ერთი წერტილიდან გამოხული მხები და მკვეთი შესაბამისად უდრის 20 სმ და 40 სმ. მკვეთი ცენტრიდან დაშორებულია 8 სმ-ით. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

8.69. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან იმ წერტილამდე, საიდანაც გამოდის მხები და მკვეთი, თუ მათი სიგრძე შესაბამისად უდრის

4 სმ-ს და 8 სმ-ს, ხოლო მკვეთი ცენტრიდან დაშორებულია 12 სმ-ით.

8.70. წრეწირის O ცენტრის A წერტილთან შემაერთებული მონაკვეთი წრეწირის კვეთს M წერტილში. M წერტილზე გავლებული მხები A წერტილიდან გავლებულ მხებებს კვეთს D და E წერტილებში. იპოვეთ DE მონაკვეთის სიგრძე, თუ წრეწირის რადიუსი 15 დმ-ია, AO მანძილი კი უდრის 39 დმ-ს.

8.71. იპოვეთ მანძილების კვადრატების ჯამი მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებამდე პიპოტენუზის იმ წერტილიდან რომელიდანაც ეს ჯამი უმცირესია, თუ კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს როგორც 3:4, ხოლო ნახაზული წრეწირის რადიუსია 1.

8.72. კათეტი $AC=15$ სმ, კათეტი $CB=8$ სმ. C ცენტრიდან CB რადიუსით შემოხაზული წრეწირი პიპოტენუზას კვეთს D წერტილში. იპოვეთ BD .

8.73. მართკუთხა სამკუთხედის მართი კუთხის წვეროდან მცირე კათეტის ტოლი რადიუსით შემოხაზული წრეწირი პიპოტენუზას ეოფს, 98 სმ-ისა და 527 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად (მცირე კათეტის მხრიდან). იპოვეთ კათეტები.

8.74. ორი ურთიერთგადაშეკვეთი წრეწირის რადიუსები უდრის 13 სმ-ს და 15 სმ-ს, ხოლო საერთო ქორდა უდრის 24 სმ-ს. იპოვეთ მანძილი ცენტრებს შორის.

8.75. ორი ურთიერთგადაშეკვეთი წრეწირის რადიუსებია 17 და 39. მათ ცენტრებს შორის მანძილია 44. იპოვეთ მათი საერთო ქორდის სიგრძე.

8.76. 18 სმ და 6 სმ რადიუსიანი წრეწირები, ერთმანეთს გარედან ეხებიან. ერთი წრეწირის ცენტრიდან გავლებულია მეორე წრეწირის მხები და შეხებით მიღებული წერტილიდან გავლებულია პირველი წრეწირის მხები. იპოვეთ ამ უკანასკნელი მხების მონაკვეთის სიგრძე.

8.77. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ მათი საერთო გარე მხების სიგრძე (შეხების წერტილთა შორის მანძილი), თუ წრეწირების რადიუსებია 16 სმ და 25 სმ.

8.78. ორი წრეწირის რადიუსებია 27 სმ და 13 სმ, მათ ცენტრებს შორის მანძილი კი უდრის 50 სმ. იპოვეთ მათი საერთო მხებების სიგრძე.

8.79. ერთმანეთის გარეთ მდებარე ორი წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილი უდრის 65 დმ-ს; მათი საერთო გარე მხების სიგრძე 63 დმ-ია, საერთო შიგა მხების სიგრძე კი 25 დმ. იპოვეთ რადიუსები.

8.80. R და r რადიუსიანი წრეწირები გარედან ეხება ერთმანეთს. იპოვეთ შეხების წერტილზე გავლებული საერთო მხეების მონაკვეთი, რომელიც მოთავსებულია საერთო გარე მხეებს შორის, თუ $R=6$, $r=\frac{8}{3}$.

8.81. R და r რადიუსიანი წრეწირები გარედან ეხება ერთმანეთს. ამ წრეწირებისათვის გავლებულია საერთო გარე მხები. მიღებულ მრუდწირულ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი. იპოვეთ მისი რადიუსი, თუ $R=9$ და $r=4$.

8.82. წრეწირზე, რომლის რადიუსი 12 სმ-ია, შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფერდი უდრის 25 სმ-ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები.

8.83. ტოლფერდა ტრაპეციაში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი უდრის 6 სმ-ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:9.

8.84. წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეები უდრის 36 სმ და 1 მ-ს. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

8.85. წრეწირის რადიუსი 10 სმ-ია. ორი ურთიერთგადამკვეთი ქორდა, რომელთა სიგრძეებია 16 სმ და $10\sqrt{3}$ სმ, ურთიერთმართობულია. იპოვეთ მონაკვეთები, რომლებადაც ეს ქორდები ერთმანეთს ყოფენ.

8.86. წრეწირის რადიუსი უდრის r -ს. იპოვეთ იმ ქორდის სიგრძე, რომელიც გავლებულია დიამეტრის ბოლოდან და ამ დიამეტრის პერპენდიკულარულ რადიუსს შუაზე ყოფს.

8.87. A და B წერტილები მდებარეობენ a წრფის მიმართ სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეში. მანძილი A და B წერტილებიდან ამ წრფემდე უდრის 2 სმ-ს და 3 სმ-ს. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ მანძილი A და B წერტილების გვერდებს შორის 12 სმ-ია.

8.88. მოცემული წრფისადმი ერთი წერტილიდან გავლებულია პერპენდიკულარი და ორი დახრილი. იპოვეთ პერპენდიკულარის სიგრძე, თუ დახრილები უდრის 41 სმ და 50 სმ, მათი გვერდები კი მოცემულ წრფეზე ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:10.

8.89. მოცემული წერტილიდან წრფისადმი გავლებულია ორი დახრილი. ერთი მათგანის სიგრძეა 13 სმ, მისი გვერდი წრფეზე 12 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე დახრილის სიგრძე, თუ ის წრფესთან ადგენს 30° -იან კუთხეს.

8.90. წრფიდან 6 მ-ით დაშორებული წერტილიდან მისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთაგან ერთი 13 მ-ია. მეორე

დახრილი წრფესთან ადგენს 45° -იან კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილთა ფუძეებს შორის.

8.91. სამკუთხედის გვერდი 60 მ-ია. ამ გვერდისადმი გაგლეხული სიმაღლე და მედიანა უდრის 12 მ-ს და 13 მ-ს. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

8.92. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდება, თუ მართი კუთხის წვეროდან გაგლეხული სიმაღლე და მედიანა ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 40:41.

8.93. პარალელოგრამის გვერდებია 15 სმ და 12 სმ. ერთ-ერთი დიაგონალი მისი გვერდის პერპენდიკულარულია. იპოვეთ დიაგონალები.

8.94. $ABCD$ ტრაპეციის BD მცირე დიაგონალი AD და BC ფუძეების პერპენდიკულარულია. A და C მახვილი კუთხეების ჯამი უდრის 90° -ს. იპოვეთ ფერდები, თუ $AD=a$ და $BC=b$.

8.95. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 15 დმ და 20 დმ. იპოვეთ მანძილი მასში ნახაზული წრეწირის ცენტრიდან ჰიპოტენუზისადმი გაგლეხულ სიმაღლემდე.

8.96. სამკუთხედის ორი გვერდია 6 სმ და 8 სმ. ამ გვერდები-სადმი გაგლეხული მედიანები ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდი.

8.97. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების მედიანებია $\sqrt{52}$ და $\sqrt{73}$. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

8.98. მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზული და მასზე შემოხა-ზულ წრეწირთა რადიუსები შეხებაამისად 2 სმ და 5 სმ ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

8.99. წრეწირში, რომლის რადიუსი 2 სმ-ის ტოლია, ნახაზუ-ლია $ABCD$ კვადრატი. AB და BC გვერდების შეაწერტილებზე გაგლეხულია ქორდა. იპოვეთ ამ ქორდის სიგრძე.

8.100. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ მანძილი ამ სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის ცენტრიდან მასზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრამდე.

8.101. კვადრატის ორი მეზობელი წვერო $5\sqrt{2}$ -რადიუსიან წრეწირზე ძეგს, ხოლო ორი დანარჩენი კი ამ წრეწირის მხებზეა. იპოვეთ ამ კვადრატის დიაგონალი.

8.102. წრეწირი ეხება კვადრატის ორ მოხაზდვრე გვერდს, ხოლო მის ორ დანარჩენ გვერდს ეოფს 2 სმ და 23 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

8.103. მართკუთხა ტრაპეციის ფუძეები უდრის 17 დმ და 25 დმ-ს, უდიდესი ფერდი კი 10 დმ-ია. ამ ფერდის შეაწერტილი-დან მისდამი გაგლეხულია პერპენდიკულარი მეორე ფერდის

გაგრძელებასთან გადაკვეთამდე. იპოვეთ ამ პერპენდიკულარის სიგრძე.

8.104. მოცემულია $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეცია, ცნობილია, რომ $AD=10$, $BC=2$, $AB=CD=5$. BAD კუთხის ბისექტრისა, BC გვერდის გაგრძელებას გადაკვეთს K წერტილში. იპოვეთ ABK სამკუთხედის B კუთხის ბისექტრისა.

8.105. წრეწირის ერთი წერტილიდან გავლებულია 10 სმ და 30 სმ სიგრძის ორი ქორდა, რომლებიც მახვილ კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ მანძილი მცირე ქორდის შუაწერტილიდან დიდ ქორდამდე უდრის 4 სმ-ს.

ამოცანები დამტკიცებაზე

8.106. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა ტრაპეციაში დიაგონალების კვადრატების სხვაობა უდრის ფუძეთა კვადრატების სხვაობას.

8.107. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ორი გვერდის კვადრატების სხვაობა მესამე გვერდის შემცველ წრფეზე მათი გვემძილების კვადრატების სხვაობის ტოლია.

8.108. M არის ABC სამკუთხედის AD სიმაღლის რომელიმე წერტილი. დაამტკიცეთ, რომ $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$.

8.109. დაამტკიცეთ, რომ კათეტების კვადრატების შეფარდება უდრის ჰიპოტენუზაზე ამ კათეტების გვემძილების შეფარდებას.

8.110. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა ტრაპეციის დიაგონალის კვადრატი უდრის ფერდის კვადრატს, დამატებული ფუძეების ნამრავლი.

8.111. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის დიაგონალების კვადრატების ჯამი უდრის ფერდების კვადრატების ჯამს დამატებული ფუძეების გაორკეცებული ნამრავლი.

8.112. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს, მაშინ საერთო გარე მხების კვადრატი დიამეტრების ნამრავლის ტოლია.

8.113. CD არის ABC მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე. ვთქვათ R , R_1 და R_2 არის შესაბამისად ABC , BDC და ACD სამკუთხედებზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსები. დაამტკიცეთ, რომ $R^2 = R_1^2 + R_2^2$.

8.114. CD არის ABC მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე. ვთქვათ r , r_1 და r_2 არის შესაბამისად ABC , BDC და ACD სამკუთხედებში ჩახაზული წრეწირების რადიუსები. დაამტკიცეთ, რომ $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

8.115. მოცემული r -რადიუსიანი წრეწირისადმი გავლებულია ორი პარალელური მხები. მესამე მხები წრეწირს C წერტილში ეხება და პარალელურ მხებებს A და B წერტილებში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ $r^2 = AC \cdot BC$.

8.116. D და E წერტილები შესაბამისად ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის AB და BC გვერდებზე მდებარეობენ. AD არის AB გვერდის მესამედი; BE კი BC გვერდის მესამედი. დაამტკიცეთ, რომ DE მონაკვეთი უდრის შემოხაზული წრეწირის რადიუსს.

8.117. ვთქვათ a და b სამკუთხედის გვერდებია, რომელთა მედიანები ურთიერთპერპენდიკულარულია. დაამტკიცეთ, რომ ამ

სამკუთხედის მესამე გვერდი $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$ -ის ტოლია.

8.118. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტის შუაწერტილიდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებულია მართობი. დაამტკიცეთ, რომ ჰიპოტენუზის მიღებული მონაკვეთების კვადრატების სხვაობა უდრის მეორე კათეტის კვადრატს.

8.119. წრეწირში გავლებულია ორი გადამკვეთი ურთიერთპერპენდიკულარული ქორდა. დაამტკიცეთ, რომ ქორდების მონაკვეთების კვადრატების ჯამი დიამეტრის კვადრატის ტოლია.

§9. კოსინუსების თეორემა. სინუსების თეორემა. სამკუთხედების ამოხსნა

ამოცანები გამოთვლაზე

9.1. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდი, თუ ორი სხვა გვერდი ერთმანეთთან 60° -იან კუთხეს შეადგენს და უდრის 5-ს და 8-ს.

9.2. იპოვეთ სამკუთხედის მესამე გვერდი, თუ ორი სხვა გვერდი ერთმანეთთან 120° -იან კუთხეს შეადგენს და უდრის 3-ს და 5-ს.

9.3. პარალელოგრამის გვერდები უდრის 23 სმ-ს და 11 სმ-ს, დიაგონალები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ დიაგონალები.

9.4. პარალელოგრამის დიაგონალები უდრის 17 სმ და 19 სმ, გვერდები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ გვერდები.

9.5. პარალელოგრამის დიაგონალები უდრის 12 სმ და 14 სმ, გვერდების სხვაობა კი 4 სმ-ია. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

9.6. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები და დიაგონალები, თუ დიდი გვერდი უდრის მცირე დიაგონალს, გვერდების სხვაობა 3 სმ-ია, დიაგონალების სხვაობა კი 2 სმ.

9.7. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე უდრის $4\sqrt{2}$, ხოლო ფერდის მედიანა – 5. იპოვეთ ფერდი.

9.8. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე, თუ ფერდი უდრის 4 სმ, ხოლო ფერდის მედიანა 3 სმ-ია.

9.9. სამკუთხედის გვერდებია 16, 18 და 26. იპოვეთ უდიდესი გვერდის მედიანა.

9.10. სამკუთხედის ორი გვერდია 7 და 11; მესამე გვერდის მედიანა უდრის 6. იპოვეთ მესამე გვერდი.

9.11. სამკუთხედის ერთი გვერდი არის 26 დმ, მისი მედიანა კი – 16 დმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ორი სხვა გვერდი, თუ მათი შეფარდებაა 3:5.

9.12. სამკუთხედის ერთი გვერდი ტოლია 23-ის; დანარჩენი ორი გვერდის მედიანები კი უდრის 15 და $22\frac{1}{2}$ -ს. იპოვეთ მესამე მედიანა.

9.13. BD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა, იპოვეთ AD და DC მონაკვეთები, თუ $AB=10$ მ, $BC=15$ მ და $AC=20$ მ.

9.14. BD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. იპოვეთ BC გვერდი, თუ $AD:DC=8:5$ და $AB=16$ მ.

9.15. BD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. იპოვეთ AC გვერდი, თუ $AB:BC=2:7$ და $DC-AD=1$ მ.

9.16. სამკუთხედის პერიმეტრია 32. A კუთხის ბისექტრისა ეოვს BC გვერდს 5-ის და 3-ის ტოლ ნაწილებად. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდი.

9.17. სამკუთხედის ბისექტრისა, რომელიც 9 სმ და 6 სმ-ის ტოლ გვერდებს შორის გადის, მესამე გვერდს ეოვს მონაკვეთებად, რომელთაგან ერთ-ერთი მოცემული გვერდებიდან ერთ-ერთის ტოლია. იპოვეთ მესამე გვერდი.

9.18. იპოვეთ კათეტები, თუ მართი კუთხის ბისექტრისა პიპოტენუზას ყოფს 15 სმ და 20 სმ-ის ტოლ ნაწილებად.

9.19. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 24 სმ და 18 სმ. იპოვეთ ამ სამკუთხედის მახვილ კუთხეთა ბისექტრისები.

9.20. მართკუთხა სამკუთხედის ბისექტრისა კათეტს ყოფს 13 სმ და 12 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად. იპოვეთ მეორე კათეტი და პიპოტენუზა.

9.21. პარალელოგრამის ბლაგვი კუთხის წვეროდან გავლებული სიმაღლეები 2 სმ და 3 სმ-ია, ხოლო მათ შორის კუთხე 30° -ია. იპოვეთ დიაგონალები.

9.22. სამკუთხედში, რომლის გვერდებია 9 სმ და 15 სმ, ნახაზულია პარალელგრამი ისე, რომ მისი ერთი გვერდი სიგრძით 6 სმ მდებარეობს სამკუთხედის მესამე გვერდზე, ხოლო დიაგონალები შესაბამისად სამკუთხედის გვერდების პარალელურია. იპოვეთ პარალელოგრამის მეორე და სამკუთხედის მესამე გვერდი.

9.23. ABC სამკუთხედში ნახაზულია $ADEF$ რომბი ისე, რომ წვეროები D , E და F მდებარეობს შესაბამისად AB , BC და AC გვერდებზე. იპოვეთ BE და EC მონაკვეთები, თუ $AB=14$ სმ, $BC=12$ სმ და $AC=10$ სმ.

9.24. მოცემულ წრეწირს ეხება მასზე მცირე და ერთმანეთის ტოლი ორი სხვა წრეწირი ერთი შიგნიდან, მეორე გარედან, შეხების წერტილთა შორის რკალი 60° -ია. მცირე წრეწირების რადიუსებია r , დიდისა R . იპოვეთ მანძილი მცირე წრეწირების ცენტრებს შორის.

9.25. ქორდა $AB=15$ მ, ქორდა $AC=21$ მ და ქორდა $BC=24$ მ. D არის CB რკალის შუაწერტილი. იპოვეთ მონაკვეთები, რომლებადაც AD ქორდა ყოფს BC ქორდას.

9.26. ორივე კათეტიდან თანაბრად დაშორებული წერტილი, რომელიც პიპოტენუზაზე მდებარეობს, პიპოტენუზას ყოფს 30 სმ და 40 სმ ტოლ მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები.

9.27. სამკუთხედის გვერდები უდრის 51 სმ, 85 სმ და 104 სმ. გავლებულია წრეწირი, რომელიც ეხება ორივე მცირე გვერდს, ხოლო ცენტრი მდებარეობს უდიდეს გვერდზე. როგორ ნაწილებად იყოფა უდიდესი გვერდი ცენტრით?

9.28. ტოლფერდა სამკუთხედში ნახაზულია წრეწირის ცენტრი სიმაღლეს ყოფს 12:5 შეფარდებით; ფერდი უდრის 60 სმ-ს. იპოვეთ ფუძე.

9.29. ტოლფერდა სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსი შეადგენს ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის $\frac{2}{7}$ ნაწილს, ხოლო ამ

სამკუთხედის პერიმეტრი უდრის 56 სმ-ს. იპოვეთ მისი გვერდები.

9.30. ტოლფერდა სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის ცენტრი ფუძეზე დაშვებულ სიმაღლეზე ყოფს 5 სმ და 3 სმ მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

9.31. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე უდრის 30 სმ, ხოლო ფერდი 39 სმ. იპოვეთ ნახაზული წრეწირის რადიუსი.

9.32. ტოლფერდა სამკუთხედის სიმაღლე უდრის 20 სმ-ს, ხოლო ფუძე ისე შეეფარდება ფერდს, როგორც 4:3. იპოვეთ ნახაზული წრეწირის რადიუსი.

9.33. ტოლფერდა ABC სამკუთხედში ფერდი $AB=10$ მ და ფუძე $AC=12$ მ; A და C კუთხეების ბისექტრისები იკვეთება D წერტილში. იპოვეთ BD .

9.34. სამკუთხედის ბისექტრისა მოპირდაპირე გვერდს ყოფს 8 სმ და 10 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ მასში ნახაზული წრეწირის ცენტრი ბისექტრისას ყოფს 3:2 შეფარდებით.

9.35. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 15 სმ და 20 სმ. მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია სიმაღლე და ბისექტრისა. რა ნაწილებად დაიყო ჰიპოტენუზა?

9.36. მართკუთხა სამკუთხედში, რომლის კათეტებია 15 დმ და 20 დმ, მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია სიმაღლე და იმ კუთხეების ბისექტრისები, რომლებსაც ეს სიმაღლე კათეტებთან შეადგენს. იპოვეთ ბისექტრისებს შორის მოთავსებული ჰიპოტენუზის მონაკვეთი.

9.37. ABC სამკუთხედში BD სიმაღლეა, ხოლო AE – ბისექტრისა. იპოვეთ AEC სამკუთხედის EF სიმაღლე, თუ $BD=30$ სმ და $AB:AC=7:8$.

9.38. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდია 10 სმ, ფუძე კი – 12 სმ. სამკუთხედში ნახაზული წრეწირისადმი გავლებულია ფუძეზე დაშვებული სიმაღლის პარალელური მხები. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდებს შორის მოთავსებული მხების მონაკვეთი.

9.39. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძის სიგრძეა 48, ფერდისა კი 30. იპოვეთ მანძილი შემოხაზული და ნახაზული წრეწირების ცენტრებს შორის.

9.40. ABC მართკუთხა სამკუთხედში A მახვილი კუთხის წვეროდან გავლებულია AK ბისექტრისა, ხოლო B მახვილი კუთხის წვეროდან კი BD მედიანა. იპოვეთ მანძილი მათი გადაკვეთის წერტილიდან BC კათეტამდე, თუ $AC=3$, $BC=4$.

9.41. მართკუთხა ABC სამკუთხედის C მართი კუთხის წვეროდან გაკლებულია CK სიმაღლე, A მახვილი კუთხის წვეროდან კი AD ბისექტრისა. იპოვეთ მანძილი მათი გადაკვეთის წერტილიდან პიპოტენუზამდე, თუ $AC=3$, $BC=4$.

9.42. ორი ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდები ტოლია და უდრის 41 დმ-ს. იპოვეთ ფუძეები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9:40, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180° -ია.

9.43. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძე და ფერდი შესაბამისად უდრის 5 სმ და 20 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძესთან მდებარე კუთხის ბისექტრისა.

9.44. ABC სამკუთხედზე $\angle A$ სიდიდით ორჯერ მეტია $\angle B$ -ზე. იპოვეთ BC , თუ $AB=15$ და $AC=12$.

9.45. ქორდა დიამეტრს კვეთს α კუთხით და იყოფა ორ მონაკვეთად სიგრძეებით 12 სმ და 7 სმ. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან ქორდამდე, თუ $\operatorname{tg}\alpha=2$.

9.46. ქორდა დიამეტრს კვეთს α კუთხით და ყოფს მას ორ მონაკვეთად სიგრძით 12,2 სმ და 6 სმ. იპოვეთ მანძილი ცენტრიდან ქორდამდე, თუ $\sin\alpha = \frac{1}{31}$.

9.47. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია a და b , ხოლო მახვილი კუთხე β -ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე, თუ $a=72$, $b=66$, $\operatorname{tg}\beta=23$.

9.48. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია a და b , ხოლო მისი მახვილი კუთხე β -ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდი, თუ $a=70$, $b=60$, $\cos\beta = \frac{1}{8}$.

9.49. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია a და b , ხოლო მახვილი კუთხის სიდიდე β -ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ $a=16$, $b=6$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$.

9.50. r რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტრაპეცია, რომლის ფერდები დიდ ფუძესთან ადგენენ α და β სიდიდის კუთხეებს, იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ $r=2.25$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{7}$.

9.51. მართკუთხა ტრაპეციის d დიაგონალი ფერდის მართობულია, ხოლო ტრაპეციის მახვილი კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე, თუ $d=80$, $\cos \alpha = \frac{1}{8}$.

9.52. მართკუთხა ტრაპეციის d დიაგონალი ფერდის მართობულია, ტრაპეციის მახვილი კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფუძე, თუ $d=45$, $\sin \alpha = \frac{4}{9}$.

9.53. მართკუთხა ტრაპეციის d დიაგონალი ფერდის მართობულია, ხოლო ტრაპეციის მახვილი კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ ტრაპეციის მცირე ფერდი, თუ $d=15$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

9.54. R რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებთან მდებარე მახვილი კუთხის სიდიდეა α . იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ $R=9$, $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.

9.55. ორი შიგა შეხების წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილია d . დიდი წრეწირის ცენტრიდან მცირე წრეწირისადმი გაკლებული მხები ცენტრთა ხაზთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ დიდი წრეწირის რადიუსი, თუ $d=36$, $\sin \alpha = \frac{1}{6}$.

9.56. R და r რადიუსიანი წრეწირების ცენტრთა წრფესა და საერთო გარე მხებს შორის კუთხის სიდიდე α -ს ტოლია. იპოვეთ ცენტრებს შორის მანძილი, თუ $R=10$, $r=6$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

9.57. ორი წრეწირი გარედან ეხება ერთმანეთს. გაკლებულია მათი ორი საერთო გარე მხები, რომლებიც α კუთხეს ქმნიან. დიდი წრეწირის რადიუსია R . იპოვეთ მცირე წრეწირის რადიუსი, თუ $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{11}$, $R=16$.

9.58. ორი გარე შეხების წრეწირის ცენტრებს შორის მანძილია d . მათი ორი საერთო გარე მხები α კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ წრეწირთა რადიუსები, თუ $d=18$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$.

9.59. წრეწირში, რომლის რადიუსია 25 ნახაზულია სამკუთხედი. ამ სამკუთხედის ორი გვერდი α და β სიდიდის რკალებს

ჭიმავენ. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$,

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{7}{25}.$$

9.60. წრეწირზე შემოხაზული მართკუთხა ტრაპეციის მახვილი კუთხის სიდიდეა 30° . იპოვეთ ტრაპეციის პერიმეტრი, თუ მანიძლი წრეწირის ცენტრიდან ტრაპეციის მართი კუთხის წვერომდე $7\sqrt{2}$ სმ-ია.

9.61. ტოლფერდა სამკუთხედში, რომლის ფუძეა a , ხოლო ფუძესთან მდებარე კუთხე — α , ნახაზულია წრეწირი. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც ეხება ნახაზულ წრეწირს და სამკუთხედის ფერდებს, თუ $a=16$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

9.62. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ჯამი უდრის m -ს, მახვილი კუთხე კი α -ს ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $m=56$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

9.63. მართკუთხა სამკუთხედის მახვილი კუთხე α -ს ტოლია, ხოლო მასში ნახაზული წრეწირის რადიუსი უდრის r -ს. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ $r=6$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

9.64. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი უდრის b -ს, ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე α -ს ტოლია. გამოთვალეთ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი, თუ $b=28$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{7}$.

9.65. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a და ფუძესთან მდებარე კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ ფერდის მედიანა, თუ $a=20$, $\operatorname{tg} \alpha = 4$.

9.66. $ABCD$ რომბის AB გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ B მდებარეობს A და M წერტილებს შორის. $MD=MC$ და $\operatorname{tg} \angle MDC=1.6$. იპოვეთ MB , თუ რომბის გვერდია 30 .

9.67. $ABCD$ რომბის AB გვერდის გაგრძელებაზე აღებულია M წერტილი ისე, რომ B მდებარეობს A და M წერტილებს შორის. $MD=MC$ და $\operatorname{tg} \angle MDC=1.6$. იპოვეთ AB , თუ $BM=14$.

9.68. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABC სამკუთხედში $AC^2 + BC^2 = AB^2$, მაშინ $\angle C$ მართია.

9.69. a , b და c სამკუთხედის გვერდებია, ხოლო m_a — a გვერდისადმი გაგლებული მედიანა. დაამტკიცეთ, რომ
$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

9.70. დაამტკიცეთ, რომ თუ D წერტილი ეკუთვნის ABC სამკუთხედის AC გვერდს და $AD:DC=AB:BC$, მაშინ BD წარმოადგენს B კუთხის ბისექტრისას.

9.71. ABC სამკუთხედის A წვეროსთან მდებარე გარე კუთხის ბისექტრისა BC გვერდის გაგრძელებას კვეთს D წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ $CD:BD=AC:AB$.

9.72. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია ($AB=BC$). AD ბისექტრისაა. დაამტკიცეთ, რომ თუ $BD=AC$, მაშინ $\angle B=36^\circ$.

9.73. ABC ტოლფერდა სამკუთხედია ($AB=BC$). AD ბისექტრისაა. დაამტკიცეთ, რომ თუ $BD=AC$, მაშინ $AD=AC$.

9.74. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხედში სრულდება
$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$$
 დამოკიდებულება, მაშინ ეს სამკუთხედი ტოლფერდაა.

9.75. სამკუთხედის ერთი კუთხე 30° -ის ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ ამ კუთხის პირდაპირ მდებარე გვერდი სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსის ტოლია.

9.76. დაამტკიცეთ, რომ თუ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების კვადრატების ჯამი ერთმანეთის ტოლია, მაშინ ამ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

9.77. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის მედიანა კუთხეს ყოფს ისეთ ნაწილებად, რომელთა სინუსები დანარსენი ორი კუთხის სინუსების პროპორციულია.

9.78. სამკუთხედის ერთი წვეროდან გამოსული სიმაღლე და მედიანა ამ წვეროსთან მდებარე კუთხეს ყოფს სამ ტოლ ნაწილად. დაამტკიცეთ, რომ ასეთი სამკუთხედი მართკუთხაა.

9.79. მოცემულია ორი კონკენტრული წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ ერთი წრეწირის რამდენიმე წერტილიდან მეორე წრეწირის დიამეტრის ბოლოებამდე მანძილების კვადრატების ჯამი არ არის დამოკიდებული არც წერტილის და არც დიამეტრის არჩევაზე.

9.80. ABC სამკუთხედში, რომლის C კუთხე 60° -ის ტოლია, გაველებულია AP და BQ ბისექტრისები. მათი გადაკვეთის წერტილია O . დაამტკიცეთ, რომ $OP=OQ$.

9.81. დაამტკიცეთ, რომ, თუ AD არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა, ხოლო O სახსრული წრეწირის ცენტრია, მაშინ $AO>OD$.

§10. ფიგურათა ფართობი

ამოცანები გამოთვლაზე

10.1. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 4:9, ხოლო ფართობი უდრის 36 მ²-ს.

10.2. იპოვეთ მართკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობი უდრის 144 სმ²-ს, ხოლო ორი გვერდის შეფარდება უდრის 1:2.

10.3. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები, თუ მისი პერიმეტრი 26 მ-ია, ფართობი კი 40 მ²?

10.4. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, თუ ჰიპოტენუზა უდრის 25 სმ და ერთი კათეტი 7 სმ-ს.

10.5. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი უდრის 720 სმ², კათეტები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 9:40. იპოვეთ ჰიპოტენუზა.

10.6. იპოვეთ ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ფუძე 120 მ-ია, ფერდი კი 100 მ.

10.7. იპოვეთ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ჰიპოტენუზა უდრის a -ს.

10.8. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია 85 სმ და 60 სმ, ხოლო მესამე გვერდზე დაშვებული სიმაღლეა 36 სმ.

10.9. კვადრატის ერთი წვერო წრეწირზე მდებარეობს, ხოლო მისი მიაპირდაპირე წვერო ამავე წრეწირის ცენტრს ემთხვევა. იპოვეთ კვადრატის ფართობი, თუ წრეწირის რადიუსი 14 სმ-ია.

10.10. მოცემული კვადრატის დიაგონალზე, როგორც გვერდზე აგებულია მეორე კვადრატი. იპოვეთ ამ კვადრატების ფართობების შეფარდება.

10.11. ორი კვადრატის ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 4:9. იპოვეთ მცირე კვადრატის გვერდი, თუ დიდი კვადრატის გვერდი 6 სმ-ის ტოლია.

10.12. კვადრატის გვერდი უდრის 7 სმ-ს. მასში ჩახაზულია მეორე კვადრატი, რომლის გვერდი 5 სმ-ია. იპოვეთ დიდი კვადრატიდან მოკეუთილი სამკუთხედის ფართობი.

10.13. სამკუთხედის პერიმეტრია 10 სმ, ხოლო მისი ფართობი კი – 3 სმ². იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის მსგავსი სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ მისი ფართობია 12 სმ².

10.14. მოცემული a და b კათეტებით იპოვეთ ჰიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე.

10.15. ABC სამკუთხედში $AB=10$ სმ, $BC=20$ სმ. A წერტილიდან გავლებული სიმაღლე უდრის 5 სმ-ს. იპოვეთ C წერტილიდან გავლებული სიმაღლე.

10.16. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე უდრის 30 დმ, სიმაღლე კი 20 დმ-ია. იპოვეთ ფერდზე დაშვებული სიმაღლე.

10.17. პარალელოგრამში ერთი გვერდისადმი გავლებული სიმაღლე სამჯერ ნაკლებია ამ გვერდზე. პარალელოგრამის ფართობი უდრის 48 სმ². იპოვეთ ეს გვერდი და სიმაღლე.

10.18. პარალელოგრამის a და b გვერდები ადგენენ 30° -იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი.

10.19. პარალელოგრამის ფართობი უდრის 15-ს, ხოლო მისი გვერდებია 6 და 5. იპოვეთ პარალელოგრამის მახვილი კუთხის გრადუსული ზომა.

10.20. რა უდიდესი ფართობი შეიძლება ჰქონდეს პარალელოგრამს, რომლის გვერდებია 1 მ და 5 მ?

10.21. პარალელოგრამის ერთი გვერდი უდრის 2 მ, მეორე კი 16 დმ; მანძილი დიდ გვერდებს შორის უდრის 8 დმ. იპოვეთ მანძილი მცირე გვერდებს შორის.

10.22. პარალელოგრამის პერიმეტრია 70 სმ. იპოვეთ მისი გვერდები და ფართობი, თუ პარალელოგრამის სიმაღლეები 2 სმ-ისა და 5 სმ-ის ტოლია.

10.23. პარალელოგრამის პერიმეტრი უდრის 48 სმ, მისი სიმაღლეები კი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 5:7. იპოვეთ პარალელოგრამის გვერდები.

10.24. პარალელოგრამის სიმაღლეებია h_1 და h_2 , ხოლო მათ შორის კუთხე არის α . იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ $h_1=13$, $h_2=4$, $\sin \alpha = \frac{13}{17}$.

10.25. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი კუთხეები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:5, ხოლო გვერდი უდრის a -ს.

10.26. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 10 სმ-ია, მახვილი კუთხე კი 30° -ია.

10.27. იპოვეთ რომბის სიმაღლე, თუ მისი დიაგონალებია 16 მ და 12 მ.

10.28. იპოვეთ რომბის გვერდი, თუ მისი ფართობი 12 სმ²-ია, ხოლო დიაგონალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2.

10.29. იპოვეთ რომბის სიმაღლე, თუ მისი ფართობია 96 სმ², ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი 12 სმ-ია.

10.30. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 12 სმ-ია, მცირე დიაგონალი კი 13 სმ.

10.31. რომბის დიაგონალების ჯამი 34 სმ-ია. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ რომბის პერიმეტრი 52 სმ-ის ტოლია.

10.32. რომბის ფართობი უდრის 11-ს, ხოლო დიაგონალების ჯამი 12-ის ტოლია. იპოვეთ რომბის პერიმეტრი.

10.33. პარალელოგრამსა და მართკუთხედს შესაბამისად ტოლი გვერდები აქვს. იპოვეთ პარალელოგრამის მახვილი კუთხე, თუ მისი ფართობი უდრის მართკუთხედის ფართობის ნახევარს.

10.34. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხე, თუ მისი გვერდის სიგრძე დიაგონალების სიგრძეების საშუალო გეომეტრიულია.

10.35. რომბის მახვილი კუთხე φ -ს ტოლია, ხოლო მასში ნახაზული წრეწირის რადიუსი უდრის r -ს. იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ $\sin \varphi = \frac{1}{4}$, $r=2$.

10.36. ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობია 11, ხოლო ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე $\sqrt{11}$. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე კუთხე.

10.37. $ABCD$ მართკუთხედის CD გვერდი 6 სმ-ია. BC გვერდზე აღებულია E წერტილი ისე, რომ $EC=2$ სმ. იპოვეთ BE , თუ ADE სამკუთხედის ფართობია 21 სმ².

10.38. ტრაპეციის ფუძეებია 10 სმ და 35 სმ, ხოლო ფართობი 225 სმ²-ია. იპოვეთ ტრაპეციის სიმაღლე.

10.39. ტრაპეციის ფუძე უდრის 26 სმ-ს, სიმაღლე – 10 სმ-ს, ხოლო ფართობი 200 სმ²-ია. იპოვეთ ტრაპეციის მეორე ფუძე.

10.40. ტრაპეციის ხიმაღლე 20 სმ-ის ტოლია, ფართობი კი 400 სმ²-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შუამონაკვეთი.

10.41. ტრაპეციის ფართობი უდრის 36 სმ²-ს, ხიმაღლე კი 2 სმ-ის ტოლდა. იპოვეთ ტრაპეციის ფუძეები, თუ ისინი ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც 4:5.

10.42. ტრაპეციის ფუძეები უდრის 3 სმ და 16 სმ. 3 სმ სიგრძის ვერტიკული ფუძესთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

10.43. წრეწირზე შემოხაზული ტოლფერდა ტრაპეციის ვერტიკული უდრის α -ს და მახვილი კუთხე 30°-ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

10.44. ტოლფერდა ტრაპეციის მახვილი კუთხე უდრის α -ს, ხოლო მასში ნახაზული წრეწირის რადიუსია r . იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; $r = \sqrt{11}$.

10.45. ტრაპეციის ფართობი არის 42 სმ². მასში ნახაზული წრეწირის რადიუსია 2 სმ. ფერდების შეფარდება არის 3:5. იპოვეთ ტრაპეციის ფერდები.

10.46. r რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზულია ტრაპეცია, რომლის ფერდები დიდ ფუძესთან ადგენენ α და β კუთხეებს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $r = \sqrt{5}$, $\sin \alpha = 0,25$; $\sin \beta = 0,2$.

10.47. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, თუ მისი დიაგონალი უდრის 8 სმ-ს და ფუძესთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს.

10.48. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეებია 12 სმ და 20 სმ, დიაგონალები კი ურთიერთპერპენდიკულარულია.

10.49. იპოვეთ იმ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეები უდრის 42 სმ და 54 სმ-ს, დიდ ფუძესთან მდებარე კუთხე კი 45°-ია.

10.50. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია a და b , ხოლო მახვილი კუთხე β -ს ტოლია. გამოთვალეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $a=22$, $b=12$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$.

10.51. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 51 სმ და 69 სმ, ვერტიკული კი 41 სმ. იპოვეთ ფართობი.

10.52. ტოლფერდა ტრაპეციაში დიდი ფუძე 44 მ-ია, ვერტიკული კი 17 მ და დიაგონალი – 39 მ. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

10.53. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეებია 10 სმ და 26 სმ, დიაგონალები კი პერპენდიკულარულია ფერდებისადმი.

10.54. მართკუთხა ტრაპეციაში მახვილი კუთხე უდრის 30° -ს. ფუძეების ჯამი უდრის m -ს, ხოლო ფერდების ჯამი n -ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

10.55. $ABCD$ ტრაპეციის AD ფუძე ორჯერ მეტია BC ფუძეზე. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ ABD სამკუთხედის ფართობი 24 სმ²-ია.

10.56. $ABCD$ კვადრატია და BCN კი – ტოლფერდა სამკუთხედი. იპოვეთ DNC სამკუთხედის ფართობი, თუ $AB=4$ სმ.

10.57. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეებია 6 სმ და 9 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 60° -ია.

10.58. ABC სამკუთხედის ფართობი 18 სმ²-ია. D წერტილი AC გვერდზე აღებულია ისე, რომ $DC=2AD$. იპოვეთ ABD და DBC სამკუთხედების ფართობები.

10.59. D წერტილი ძვეს ABC სამკუთხედის AB გვერდზე. როგორ შეფარდება AD მონაკვეთი DB -ს, თუ ACD სამკუთხედის ფართობი სამჯერ ნაკლებია ABC სამკუთხედის ფართობზე?

10.60. ABC სამკუთხედის BC გვერდზე აღებულია D წერტილი. E წერტილი AD მონაკვეთს ეოფს შეფარდებით 2:3 (წვეროს მხრიდან). იპოვეთ BEC სამკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 40.

10.61. ABC სამკუთხედის AB გვერდზე აღებულია K წერტილი, ხოლო AC გვერდზე M და N წერტილები ისე, რომ $AK:KB=1:2$, $AM:MN:NC=1:2:3$. იპოვეთ MKN სამკუთხედის ფართობი, თუ ABC სამკუთხედის ფართობია 18.

10.62. ABC სამკუთხედში BD მონაკვეთი მედიანაა, ხოლო AK მონაკვეთი ABD სამკუთხედის ბისექტრისაა. ABC სამკუთხედის ფართობი 20 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ AKD სამკუთხედის ფართობი, თუ $AC:AB=1:2$.

10.63. $ABCD$ კვადრატის გვერდი 10 სმ-ია. N წერტილი კვადრატის AD გვერდის შუაწერტილია. AC და BN მონაკვეთები M წერტილში იკვეთებიან. იპოვეთ AMN სამკუთხედის ფართობი.

10.64. ABC სამკუთხედის ფართობია 360. მისი AB და AC გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია ერთმანეთთან და მედიანების გადაკვეთის წერტილთან. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

10.65. მართკუთხა სამკუთხედში მახვილი კუთხის ბისექტრისა მოპირდაპირე კათეტს ეოფს 4 სმ და 5 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

10.66. a და b კათეტების მქონე მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზულია კვადრატო, რომელსაც სამკუთხედთან საერთო მართი კუთხე აქვს. იპოვეთ კვადრატის ფართობი.

10.67. მართი კუთხის შიგნით აღებული წერტილზე გამავალი წრფე მართი კუთხიდან ნამოკვეთს სამკუთხედს, რომლის ფართობია 100 სმ². იპოვეთ სამკუთხედის კათეტები, თუ აღებული წერტილი კუთხის გვერდებიდან დაშორებულია 4 სმ და 8 სმ-ით.

10.68. იპოვეთ იმ კვადრატის ფართობი, რომელიც ნახაზულია a გვერდის მქონე წესიერ სამკუთხედში.

10.69. სამკუთხედის გვერდი 30 სმ-ია, ხოლო ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლე 10 სმ. მასში ნახაზულია მართკუთხედი, რომლის ფართობი 63 სმ²-ია. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები, თუ მისი გვერდი ძვეს სამკუთხედის მოცემულ გვერდზე.

10.70. $ABCD$ კვადრატის BC გვერდზე აღებულია E და F წერტილები ისე, რომ $BE=EF=FC$. K წერტილი AE და DF წრფეების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ AKD სამკუთხედის ფართობი, თუ კვადრატის გვერდი 6 სმ-ია.

10.71. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე პიპიტენუსას 32 სმ-ისა და 18 სმ-ის ტოლ მონაკვეთებად ეოფს.

10.72. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 6 მ და 8 მ. მართი კუთხის წვეროდან გავლებულია სიმაღლე. იპოვეთ მიღებულ სამკუთხედთა ფართობები.

10.73. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობია $2\sqrt{3}$ სმ². იპოვეთ პიპიტენუსაზე დაშვებული სიმაღლე, თუ ის მართ კუთხეს ეოფს $1:2$ შეფარდებით.

10.74. მართკუთხა სამკუთხედში კათეტები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $3:4$, სიმაღლე სამკუთხედის ფართობს ეოფს ნაწილებად, რომელთა სხვაობაა 84 დმ². იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფართობი.

10.75. $ABCD$ ტრაპეციის AB ფერდის პარალელური წრფე, რომელიც BC და AD ფუძეებს კვეთს შესაბამისად E და F წერტილებში, ტრაპეციის ფართობს შუაზე ეოფს. იპოვეთ AF , თუ $AD=28$ სმ და $BC=12$ სმ.

10.76. ტრაპეციის ფართობი მისი დიაგონალით იყოფა შეფარდებით $3:7$. როგორი შეფარდებით იყოფა ის შუამონაკვეთით?

10.77. დიაგონალი ტრაპეციის ფართობს ეოფს შეფარდებით $3:7$. როგორი შეფარდებით გაეოფს ამავე ტრაპეციის ფართობს მცირე ფუძის ბოლოდან ფერდის პარალელურად გავლებული წრფე?

10.78. ტრაპეციის ფუძეებია 3 სმ და $\sqrt{41}$ სმ. M და N წერტილები მდებარეობენ ფერდობზე ისე, რომ MN ფუძეების პარალელურია და ტრაპეციის ფართობს შეაზეოვს. იპოვეთ MN .

10.79. ტრაპეციის ფუძეების პარალელური წრფე ტრაპეციას ეყოფს ორ ნაწილად, რომელთა ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:7. იპოვეთ ფერდობს შორის მოქცეული მონაკვეთის სიგრძე, თუ ტრაპეციის ფუძეებია $\sqrt{2}$ და 5.

10.80. $ABCD$ ტრაპეციაში ფერდი $CD=9$, ხოლო მანძილი AB -ს შეაწერტილიდან CD წრფემდე არის 11. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

10.81. ტოლფერდა ტრაპეციის სიმაღლეა h , ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე α . იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $h = 2\sqrt{2}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

10.82. ტოლფერდა სამკუთხედის მედიანები უდრის 15, 15 და 18-ს. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

10.83. ტოლფერდა სამკუთხედში ფერდის მედიანა ტოლია m -ის და ფუძესთან α კუთხეს შეადგენს. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ $m=10$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

10.84. ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობია S . ფერდების მედიანების მიერ შექმნილი კუთხე, რომელიც ფუძის მოპირდაპირედ მდებარეობს, α -ს ტოლია. იპოვეთ სამკუთხედის ფუძე, თუ $S=900$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$.

10.85. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობია S და მახვილი კუთხე α . იპოვეთ მანძილი მედიანების გადაკვეთის წერტილიდან პიპოტენუსამდე, თუ $S=81$, $\sin 2\alpha = \frac{4}{9}$.

10.86. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე უდრის 3 დმ-ს, ფერდზე დაშვებული სიმაღლე კი 4 დმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები.

10.87. ABC სამკუთხედში $BC=16$ მ, $AC=12$ მ. მათი შესაბამისი სიმაღლეების ჯამი $AD+BE=14$ მ. იპოვეთ AD და BE .

10.88. სამკუთხედის სიმაღლე 2 სმ-ია და სამკუთხედის კუთხეს ეყოფს შეფარდებით 2:1, ხოლო მოპირდაპირე გვერდს ორ მონაკვეთად, რომელთაგან უმცირესის სიგრძე 1 სმ-ია. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი.

10.89. მოცემული სამკუთხედის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც მისგან შუა მონაკვეთითაა მოკვეთილი?

10.90. სამკუთხედში გავლებულია ყველა შუამონაკვეთი. მოცემული სამკუთხედის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს შუა მონაკვეთებით შედგენილი სამკუთხედის ფართობი?

10.91. ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მიმდევრობით. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი, თუ მოცემული ოთხკუთხედის ფართობი 24 სმ^2 -ია.

10.92. სამკუთხედის გვერდის პარალელური წრფე ამ სამკუთხედის ფართობს ეოფს $2:1$ შეფარდებით (წვეროს მხრიდან). რა შეფარდებით ეოფს ეს წრფე დანარჩენ გვერდებს?

10.93. სამკუთხედის გვერდის პარალელური წრფე ამ სამკუთხედს ტოლდიდ ნაწილებად ეოფს. იპოვეთ მოკვეთილი სამკუთხედის პერიმეტრი, თუ მოცემული სამკუთხედის პერიმეტრია 52 სმ .

10.94. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი პიპოტენუზის პერპენდიკულარული წრფით გაყოფილია შუაზე. იპოვეთ რა მანძილითაა დაშორებული ეს წრფე უმცირესი მხვილი კუთხის წვეროდან, თუ დიდი კათეტი უდრის 20 მ-ს .

10.95. სამკუთხედის გვერდი გაყოფილია შეფარდებით $2:3:4$ და დაეოფოს წერტილებზე გავლებულია ერთ-ერთი გვერდის პარალელური წრფეები. რა შეფარდებით გაიყო სამკუთხედის ფართობი?

10.96. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მოცემულია მისი სამი გვერდი: 1) $13, 14, 15$; 2) $5, 6, 9$; 3) $17, 65, 80$.

10.97. სამკუთხედის გვერდები უდრის 25 დმ , 29 დმ , 36 დმ . იპოვეთ უმცირესი სიმაღლე.

10.98. იპოვეთ იმ სამკუთხედის უდიდესი სიმაღლე, რომლის გვერდებია $113, 112, 15$.

10.99. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც $9:10:17$, ფართობი კი უდრის 144 სმ^2 -ს.

10.100. იპოვეთ ოთხკუთხედის ფართობი, რომლის დიაგონალია 17 სმ და ამ დიაგონალის ერთ მხარეზე მდებარე გვერდებია 10 სმ და 21 სმ , მეორე მხარეზე მდებარე გვერდები კი 8 სმ და 15 სმ .

10.101. იპოვეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ მისი ერთი გვერდი 51 სმ-ია . დიაგონალები კი უდრის 40 სმ და 74 სმ-ს .

10.102. სამკუთხედის ორი გვერდითა და ფართობით იპოვეთ მესამე გვერდი, თუ $a=17$, $b=28$, $S=210$.

10.103. სამი წრეწირი, რომელთა რადიუსებია 6 სმ, 7 სმ, 8 სმ წვეილ-წვეილად ეხებიან ერთმანეთს. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომლის წვეროებია ამ წრეწირთა ცენტრები.

10.104. ABC სამკუთხედში $AB=13$ სმ, $BC=15$ სმ და $AC=14$ სმ. B წვეროდან გავლებულია ამ სამკუთხედის სიმაღლე და ბისექტრისა. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც ამ ბისექტრისასა და სიმაღლეს შორის არის მოთავსებული.

10.105. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი ორი გვერდია 27 სმ და 29 სმ, მესამე გვერდის მედიანა კი – 26 სმ.

10.106. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი 5-ისა და 9-ის ტოლი მედიანები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

10.107. წრეწირზე შემოხაზული მრავალკუთხედის პერიმეტრი უდრის 60 სმ-ს. მისი ფართობი კი 240 სმ²-ია. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

10.108. წრეწირზე, რომლის რადიუსი უდრის 25 სმ-ს, შემოხაზულია მრავალკუთხედი, რომლის ფართობი უდრის 20 დმ²-ს. იპოვეთ მისი პერიმეტრი.

10.109. იპოვეთ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ნახაზული წრეწირების რადიუსები, თუ სამკუთხედის გვერდებია 13, 14, 15.

10.110. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდი უდრის 6-ს, ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე კი 4-ს. იპოვეთ შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

10.111. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძე 12 დმ-ია, ფერდი კი 10 დმ. იპოვეთ შემოხაზული და ნახაზული წრეწირის რადიუსები და მანძილი მათ ცენტრებს შორის.

10.112. წრეწირის ქორდა, რომელიც 16 სმ-ის ტოლია, დაშორებულია ცენტრიდან 15 სმ-ით. იპოვეთ იმ სამკუთხედის ფართობი, რომელიც შემოხაზულია ამ წრეწირზე, თუ ვიცით, რომ სამკუთხედის პერიმეტრი უდრის 200 სმ-ს.

10.113. წრეწირის ერთი წერტილიდან გავლებულია 9 სმ და 17 სმ სიგრძის ორი ქორდა. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ მანძილი ქორდების შუაწერტილებს შორის უდრის 5 სმ.

10.114. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე უდრის α -ს, ხოლო ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე m -ით მეტია ნახაზული წრეწირის რადიუსზე. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი,

$$\text{თუ } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \quad m = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

10.115. ტოლფერდა სამკუთხედის ფართობი უდრის S -ს, ხოლო კუთხე ფერდზე დაშვებულ სიმაღლესა და ფუძეს შორის უდრის

α -ს. იპოვეთ სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსი, თუ $S=48$ სმ²; $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

10.116. $ABCD$ მართკუთხა ტრაპეციაში B კუთხე მართია. AB და BC გვერდები შესაბამისად 15 სმ და 10 სმ-ია. B წერტილზე გავლებული AC დიაგონალის პარალელური წრფე და C წერტილზე გავლებული AC -ს პერპენდიკულარული წრფე იკვეთებიან K წერტილში. იპოვეთ BCK სამკუთხედის ფართობი.

10.117. მართკუთხა სამკუთხედის ერთ-ერთი კათეტი 15 სმ, ხოლო ნახაზული წრეწირის რადიუსი – 3 სმ. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

10.118. მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი უდრის 24 სმ², ხოლო ჰიპოტენუზაა 10 სმ. იპოვეთ სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის რადიუსი.

10.119. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების შეფარდება უდრის 1.05-ს, შემოხაზული და ნახაზული წრეწირების რადიუსების სხვაობა 17 დმ-ია. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი.

10.120. AB და CD არაგადამკვეთი ქორდებით მოჭიმული რკალების გრაფიკული ზომებია შესაბამისად 120° და 90° . M არის AD და BC ქორდების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ AMB და CMD სამკუთხედების ფართობები, თუ მათი ჯამია 100 მ².

10.121. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მოცემულია შემოხაზული წრეწირის რადიუსი R და ორი კუთხე 45° და 60° .

10.122. R რადიუსის მქონე წრეწირში ნახაზულია სამკუთხედი, რომლის ორი კუთხეა 15° და 60° . იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი, თუ $R=\sqrt{108}$.

10.123. R რადიუსიან წრეწირში ნახაზულია ტრაპეცია, რომლის ფერდი მცირე ფუძის ტოლია, ხოლო ამ ფუძით მოჭიმული რკალის გრაფიკული ზომაა α . იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ წრეწირის ცენტრი ტრაპეციის შიგნით ძვეს და $R=18$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

10.124. R რადიუსიან წრეწირში ცენტრის ერთ მხარეზე გავლებულია ორი პარალელური ქორდა. ერთი მათგანი ჭიმავს 60° -იან რკალს, მეორე – 120° -იანს. მათი ბოლოები შეერთებულია. იპოვეთ მიღებული ტრაპეციის ფართობი.

10.125. წრეწირზე, რომლის რადიუსი 2-ის ტოლია, შემოხაზულია ტოლფერდა ტრაპეცია 20-ის ტოლი ფართობით. იპოვეთ ტრაპეციის დიდი ფუძე.

10.126. R რადიუსის მქონე ორი წრეწირი ცენტრებით O_1 და O_2 წერტილებში ერთმანეთს ეხება. A , B , C და D წერტილებში მათ კვეთს წრფე იმგვარად, რომ $AB=BC=CD$. იპოვეთ O_1ADO_2 ოთხკუთხედის ფართობი.

10.127. სამკუთხედის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომლის ცენტრი საშუალო ზომის გვერდზეა და რომელიც ორ დანარჩენ გვერდს ეხება.

10.128. სამკუთხედის გვერდებია 2 და 3, ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხეა α . იპოვეთ სამკუთხედის ამ კუთხის ბისექტორი, თუ $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

10.129. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ მისი გვერდებია 5 და 10, ხოლო ამ გვერდებს შორის მოთავსებული ბისექტრისაა 4.

10.130. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ გვერდი არის a და მასთან მდებარე კუთხეები 30° და 45° -ია.

10.131. სამკუთხედში ჩახაზულია რომბი, რომელსაც სამკუთხედთან საერთო კუთხე აქვს. სამკუთხედის გვერდები, რომელთა შორისაც ეს კუთხეა მოთავსებული, ისე შეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ რომბის ფართობის შეფარდება სამკუთხედის ფართობთან.

10.132. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტების ჯამი m -ის ტოლია, ხოლო მახვილი კუთხეა α . იპოვეთ სამკუთხედის ფართობი, თუ $m=24$, $\alpha=15^\circ$.

10.133. რომში ჩახაზულია წრეწირი, ხოლო ამ წრეწირში – კვადრატი. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხე, თუ კვადრატის ფართობი ოთხჯერ ნაკლებია რომბის ფართობზე.

10.134. 30° -იანი მახვილი კუთხის მქონე რომში ჩახაზულია წრეწირი, ხოლო წრეწირში – კვადრატი. იპოვეთ რომბის ფართობის შეფარდება კვადრატის ფართობთან.

10.135. ტრაპეციის დიაგონალებია 20 და 15, სიმაღლე 12. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

10.136. $ABCD$ ტრაპეციის BC და AD ფუძეები შესაბამისად 4 სმ და 8 სმ-ია. ტრაპეციის BD დიაგონალი, მისი ფუძეების მართობულია და უდრის 6 სმ-ს. O წერტილი ტრაპეციის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ AOB სამკუთხედის ფართობი.

10.137. $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია BC და AD , ხოლო O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ AOD და BOC სამკუთხედების ფართობებია შესაბამისად 36 და 9.

10.138. $ABCD$ მართკუთხედის BC და AD გვერდებზე შესაბამისად აღებულია E და F წერტილები ისე, რომ $BE:EC=DF:FA=2:1$. AE და BF მონაკვეთები M წერტილში იკვეთებიან, ხოლო CF და DE კი — N წერტილში. იპოვეთ $MENF$ ოთხკუთხედის ფართობის შეფარდება მთავარ მართკუთხედის ფართობთან.

10.139. r რადიუსიან წრეწირზე შემოსახულია მართკუთხა ტრაპეცია, რომლის უძირესი გვერდია $\frac{3}{2}r$. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $r=2$.

10.140. ტოლფერდა ტრაპეციაში ნახაზულია 5 სმ რადიუსის მქონე წრეწირი. ტრაპეციის მცირე ფუძე მის სიმაღლეზე ორჯერ ნაკლებია. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

10.141. ტოლფერდა ტრაპეციაში ნახაზულია წრეწირი. მხეების წერტილით ტრაპეციის ფერდი იყოფა 1 სმ და 4 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი.

10.142. ტოლფერდა ტრაპეციაში ფერდი შემონაკვეთის ტოლია. ტრაპეციის პერიმეტრი უდრის P -ს, ხოლო მახვილი კუთხე α -ს. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი. თუ $P=48$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

10.143. წრეწირზე შემოსახული ტოლფერდა ტრაპეციის ფართობი უდრის 72 სმ², ხოლო ტრაპეციის სიმაღლე 2-ჯერ ნაკლებია მის ფერდზე. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი.

10.144. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეებია 6 სმ და 9 სმ, დიაგონალები კი უდრის 13 სმ და 14 სმ-ს.

10.145. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, რომლის ფუძეებია 20 და 60, ხოლო ფერდები — 13 და 37.

10.146. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 21 სმ და 9 სმ, ხოლო სიმაღლეა 8 სმ. იპოვეთ შემოსახული წრეწირის რადიუსი.

10.147. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძის შუაწერტილიდან ფერდზე დაშვებული პერპენდიკულარი h -ის ტოლია და ფერდს შუაზე ყოფს. ტრაპეციის ბლაგვი კუთხეა α . იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ $h=5$, $\sin 2\alpha = -\frac{1}{10}$.

10.148. კვადრატში, რომლის გვერდია 4, ორი მოსახლვრე გვერდის შუაწერტილები შეერთებულია ერთმანეთთან და მოპირდაპირე წვეროსთან. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობი.

10.149. კვადრატის გვერდი უდრის a -ს. მასში ნახაზულია მეორე კვადრატი, რომლის გვერდი მთავარი კვადრატის გვერდ-

თან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ ნახაზული კვადრატის ფართობი, თუ $a=6$, $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$.

10.150. პარალელოგრამში, რომლის გვერდებია a და b და კუთხე α , გავლებულია ოთხივე კუთხის ბისექტრისები. იპოვეთ ბისექტრისებით შემოსაზღვრული ოთხკუთხედის ფართობი, თუ $a=4$, $b=7$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

10.151. იპოვეთ $ABCD$ რომბის ფართობი, თუ ABC და ABD სამკუთხედებზე შემოსაზღული წრეწირების რადიუსებია 3 და 1.

10.152. ტოლფერდა სამკუთხედის ფერდზე, როგორც დიამეტრზე აგებული წრეწირის სამკუთხედის ფუძესთან და მეორე ფერდთან გადაკვეთის წერტილები შეერთებულია მონაკვეთით. იპოვეთ მიღებული ოთხკუთხედის ფართობი, თუ ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა 4, ხოლო მასზე დაშვებული სიმაღლე 6.

10.153. $ABCD$ ტრაპეციაში A და B კუთხეები მართია. B და C კუთხეების ბისექტრისები იკვეთებიან M წერტილში. იპოვეთ BMC სამკუთხედის ფართობი, თუ $AD=8$, $BC=4$, $CD=5$.

10.154. პარალელოგრამის გვერდებია a და b , ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის α -ს. განსაზღვრეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ $a=6$, $b=4$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$.

10.155. პარალელოგრამის დიაგონალებია d_1 და d_2 , ხოლო მახვილი კუთხე უდრის α -ს. გამოთვალეთ პარალელოგრამის ფართობი, თუ $d_1=8$, $d_2=5$, $\operatorname{tg} \alpha=4$.

ამოცანები დამტკიცებაზე

10.156. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის გვერდები ამ გვერდებზე დაშვებული სიმაღლეების უკუპროპორციულია.

10.157. ABC სამკუთხედში გავლებულია AD მედიანა. დაამტკიცეთ, რომ ABD და ACD სამკუთხედები ტოლდიდია.

10.158. ABC სამკუთხედში BD მედიანის F შუაწერტილი შეერთებულია A და C წვეროებთან. დაამტკიცეთ, რომ AFD , CFD , BCF და ABF ტოლდიდი სამკუთხედებია.

10.159. პარალელოგრამში მისი ერთი წვერო შეერთებულია მოპირდაპირე გვერდების შუაწერტილებთან და მოპირდაპირე

წვეროსთან. დაამტკიცეთ, რომ ამ გზით მიღებული ოთხი სამკუთხედი ტოლდიდია.

10.160. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის ფუძეების შუაწერტილებზე გაშვებული წრფე, მას ორ ტოლდიდ ნაწილად ყოფს.

10.161. დაამტკიცეთ, რომ ტრაპეციის შუამონაკვეთის შუაწერტილში გაშვებული და ფუძეების გადამკვეთი წრფე ამ ტრაპეციას ორ ტოლდიდ ნაწილად ყოფს.

10.162. ტრაპეციას დიაგონალები ყოფენ ოთხ ნაწილად. დაამტკიცეთ, რომ ფერდებთან მიმდებარე ნაწილები ერთმანეთის ტოლდიდია.

10.163. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი არ აღემატება $\frac{a^2 + b^2}{4}$ -ს, სადაც a და b სამკუთხედის გვერდებია.

10.164. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha$, სადაც c ჰიპოტენუზაა, ხოლო α მახვილი კუთხეა.

10.165. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული ჰიპოტენუზის მქონე მართკუთხა სამკუთხედებს შორის უდიდესი ფართობი აქვს ტოლფერდა სამკუთხედს.

10.166. დაამტკიცეთ, რომ ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძის ნებისმიერი წერტილიდან ფერდებამდე მანძილების ჯამი მუდმივო სიდიდეა. რას უდრის იგი?

10.167. O წერტილი ტოლგვერდა სამკუთხედის ნებისმიერი შიგა წერტილია, დაამტკიცეთ, რომ ამ წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე მანძილების ჯამი არ არის დამოკიდებული O წერტილის მდებარეობაზე. რას უდრის ეს ჯამი?

10.168. სამკუთხედის ფუძის შუაწერტილიდან გავლებულია გვერდების პარალელური წრფეები. დაამტკიცეთ, რომ ამ გზით მიღებული პარალელოგრამის ფართობი, უდრის სამკუთხედის ფართობის ნახევარს.

10.169. ტრაპეციის ფუძეების შუაწერტილების შემაერთებელ მონაკვეთზე აღებული წერტილი შეერთებულია მის წვეროებთან. დაამტკიცეთ, რომ ფერდებზე დაერდნობილი სამკუთხედები ტოლდიდია.

10.170. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ტრაპეციაში AB ფერდის M შუაწერტილს შევაერთებთ მეორე CD ფერდის ბოლოებთან, მაშინ მიღებული CMD სამკუთხედის ფართობი ტრაპეციის ფართობის ნახევრის ტოლია.

10.171. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის მედიანები მას ყოფს ექვს ტოლდიდ სამკუთხედად.

10.172. ორი ტოლდიდი სამკუთხედი, რომელთა ტოლი ფუძეები ძვეს ერთ წრფეზე, გადაკვეთილია მათი ფუძეების პარალელური წრფით. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედებში მოქცეული ამ პარალელური წრფის მონაკვეთები ტოლია.

10.173. დაამტკიცეთ ტოლობა $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, სადაც h_a, h_b, h_c

სამკუთხედის სიმაღლეებია, ხოლო r — ჩახაზული წრეწირის რადიუსია.

10.174. ჩახაზულ ოთხკუთხედში ერთი დიაგონალი მეორეს შუაზე ყოფს. დაამტკიცეთ, რომ პირველი დიაგონალის კვადრატული უდრის ოთხკუთხედის ყველა გვერდის კვადრატების ჯამის ნახევარს.

10.175. სამკუთხედის m_a და m_b მედიანები გადაკვეთისას α კუთხეს ქმნიან. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი $\frac{2}{3}m_a m_b \sin \alpha$ -ს ტოლია.

10.176. სამკუთხედის გვერდებია a და b , ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხეა α . დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ამ კუთხის ბისექტრისა გამოითვლება ფორმულით $\frac{2ab \cos \alpha/2}{a+b}$.

10.177. S არის $ABCD$ ოთხკუთხედის ფართობი. დაამტკიცეთ, რომ $(AB + CD)(BC + AD) \geq 4S$.

10.178. E არის $ABCD$ კვადრატის BC გვერდის შუაწერტილი. CF არის DCE სამკუთხედის სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ $S_{ABCD} = 5S_{CDF}$.

10.179. ნებისმიერი ამოხსნეჟილი ოთხკუთხედის გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მიმდევრობით. დაამტკიცეთ, რომ მიღებული პარალელოგრამის ფართობი ოთხკუთხედის ფართობის ნახევრის ტოლია.

10.180. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედში კათეტების ჯამი ნაკლებია ჰიპოტენუსისა და მასზე დაშვებული სიმაღლის ჯამზე.

10.181. დაამტკიცეთ, რომ იმ სამკუთხედებიდან, რომლებიც მოცემულ წრეწირშია ჩახაზული, უდიდესი ფართობი ტოლგვერდა სამკუთხედს ექნება.

10.182. დაამტკიცეთ, რომ იმ ოთხკუთხედებიდან, რომლებიც მოცემულ წრეწირშია ჩახაზული, უდიდესი ფართობი კვადრატს ექნება.

10.183. ტოლფერდა სამკუთხედში ჩახაზულია მართკუთხედი ისე, რომ ერთი წვერო ძვეს სამკუთხედის ფუძეზე, ხოლო დანარჩენი ორი წვერო კი – ფერდებზე. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხედის ფართობი უდის იქნება იმ შემთხვევაში, როდესაც წვეროები ფერდებს შუაზე ეყოფნენ.

10.184. ტრაპეციის ფუძეებია a და b . დაამტკიცეთ, რომ იმ მონაკვეთის სიგრძე, რომელიც ფუძეების პარალელურია და ტრაპეციის ფართობს შუაზე ეყოფს ტოლია $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

10.185. α და β სამკუთხედის a გვერდთან მდებარე კუთხეებია. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედის ფართობი ტოლია $\frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$.

10.186. ABC მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირი BC პიპოტენუსას ეხება D წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $S = BD \cdot DC$.

10.187. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ სამკუთხედში წვეილ-წვეილად აღებული გვერდების ნამრავლთა ჯამის შეფარდება მისი სამი სიმაღლის ჯამთან უდრის ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრს.

§11. წრეწირში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული მრავალკუთხედები. წრეწირის სიგრძე. წრისა და მისი ნაწილების ფართობი

ამოცანები გამოთვლაზე

11.1. წესიერ სამკუთხედზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსების სხვაობა უდრის m -ს. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი.

11.2. გამოთვალეთ r რადიუსიან წრეწირზე შემოხაზული წესიერი სამკუთხედის ფართობი.

11.3. R რადიუსიან წრეწირში ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ მისი ფართობი, თუ $R = 4\sqrt{3}$.

11.4. წესიერ სამკუთხედში, რომლის გვერდი არის a , ჩახაზულია წრეწირი, რომელშიაც ჩახაზულია წესიერი ექვსკუთხედი. იპოვეთ ექვსკუთხედის ფართობი.

11.5. წესიერ ექვსკუთხედში ნახაზულია წრეწირი, რომელშიც ნახაზულია წესიერი სამკუთხედი. იპოვეთ ამ სამკუთხედის ფართობი, თუ ექვსკუთხედის გვერდი ტოლია a -სი.

11.6. წესიერ ექვსკუთხედში ნახაზულია წრეწირი, ხოლო წრეწირში ნახაზულია წესიერი სამკუთხედი. იპოვეთ სამკუთხედისა და ექვსკუთხედის ფართობთა შეფარდება.

11.7. იპოვეთ წრეწირზე შემოხაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი, თუ წრეწირის რადიუსი r -ის ტოლია.

11.8. წრეწირში ნახაზულია კვადრატი და წესიერი სამკუთხედი. კვადრატის ფართობი 54-ია. იპოვეთ სამკუთხედის პერიმეტრი.

11.9. წესიერი ექვსკუთხედის გვერდი 84 სმ-ია. იპოვეთ მისი ტოლდიდი წესიერი სამკუთხედის გვერდი.

11.10. წესიერი სამკუთხედის, კვადრატისა და წესიერი ექვსკუთხედის გვერდები ტოლია. როგორ შეეფარდება ერთმანეთს ამ ფიგურების ფართობები?

11.11. იპოვეთ ტოლგვერდა სამკუთხედის, კვადრატისა და წესიერი ექვსკუთხედის ფართობთა შეფარდება, თუ მათი პერიმეტრები ტოლია.

11.12. a გვერდის მქონე კვადრატისაგან იმგვარად არის ნამოჭრილი კუთხეები, რომ მიღებულია წესიერი რვაკუთხედი. იპოვეთ ამ რვაკუთხედის ფართობი, თუ $a = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$.

11.13. წრეწირში ნახაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი უდრის $16\sqrt{6}$. იპოვეთ იმავე წრეწირში ნახაზული წესიერი სამკუთხედის ფართობი.

11.14. წრეწირში ნახაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი უდრის $5\sqrt{3}$ -ს. იპოვეთ იმავე წრეწირში ნახაზულია წესიერი თორმეტიკუთხედის ფართობი.

11.15. წრეწირში ნახაზული წესიერი თორმეტიკუთხედის ფართობი უდრის $18\sqrt{2}$ -ს. იპოვეთ იმავე წრეწირში ნახაზული წესიერი რვაკუთხედის ფართობი.

11.16. წრეწირში ნახაზული წესიერი 12-კუთხედის ფართობია Q . იპოვეთ იმავე წრეწირში ნახაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი.

11.17. წრეწირში ნახაზული წესიერი 8-კუთხედის ფართობია Q . იპოვეთ იმავე წრეწირში ნახაზული კვადრატის ფართობი.

11.18. წრეწირზე შემოხაზული წესიერი n -კუთხედის გვერდი უდრის a -ს. იპოვეთ იმავე წრეწირში ნახაზული წესიერი n -კუთხედის გვერდი.

11.19. წესიერ n -კუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი უდრის R -სივრცით ნახაზული წრეწირის რადიუსი.

11.20. წრეწირში ნახაზულია და მასზე შემოხაზულია წესიერი n -კუთხედები. იპოვეთ n -კუთხედების გვერდების შეფარდება.

11.21. წესიერი n -კუთხედის გვერდი უდრის a -ს. იპოვეთ უმცირესი დიაგონალი.

11.22. R რადიუსიან წრეწირში ნახაზულია წესიერი n -კუთხედი. მისი გვერდების შუაწერტილები შეერთებულია მიმდევრობით. იპოვეთ მიღებული n -კუთხედის გვერდი, თუ n უდრის: 1) 6; 2) 8.

11.23. მიმდევრობით შეერთებულია წესიერი 8-კუთხედის 4 გვერდის შუაწერტილები თითო გვერდის გამოტოვებით. იპოვეთ მიღებული კვადრატის გვერდი, თუ 8-კუთხედის გვერდი უდრის a -ს.

11.24. გოლგვერდა სამკუთხედში ნახაზულია წრეწირი. ამ წრეწირის მიერ სამკუთხედის კუთხეებიდან ჩამოკვეთილ კუთხეთა ნაწილებში ნახაზულია მცირე წრეწირები. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი, თუ მცირე წრეწირის რადიუსია $\sqrt{3}$.

11.25. წესიერი n -კუთხედის გვერდი უდრის a -ს. იპოვეთ მასზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე, თუ: 1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=6$.

11.26. წესიერი n -კუთხედის გვერდი უდრის a -ს. იპოვეთ მასში ნახაზული წრეწირის სიგრძე, თუ: 1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=6$.

11.27. წრეწირის რადიუსი 4 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ წრეწირის იმ რკალის გრადუსული ზომა, რომლის სიგრძეა: 1) 2π სმ; 2) $0,5\pi$ სმ.

11.28. იპოვეთ წრეწირის იმ რკალის გრადუსული ზომა, რომლის სიგრძეც რადიუსის ტოლია.

11.29. იპოვეთ წრეწირის სიგრძე და რადიუსი, თუ მისი 36° -იანი რკალის სიგრძე 45 სმ-ია.

11.30. მოცემული a ქორდით იპოვეთ მის მიერ მოჭიმული უმცირესი რკალის სიგრძე, თუ რკალის გრადუსული ზომია: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

11.31. მოცემული რკალის სიგრძეა L . იპოვეთ მისი შესაბამისი ქორდა, თუ რკალის გრადუსული ზომია: 1) 60° ; 2) 90° ; 3) 120° .

11.32. იპოვეთ წრის ფართობი, თუ წრეწირის სიგრძეა L .

11.33. იპოვეთ წრეწირის რადიუსი, თუ მისი სიგრძე რიცხობრივად ამავე რადიუსის მქონე წრის ფართობის ტოლია.

11.34. იპოვეთ წრის ფართობი, თუ მასში ნახაზული კვადრატის ფართობია 30.

11.35. წესიერი მქვსკუთხედის ფართობია 24 სმ^2 . იპოვეთ ამ მქვსკუთხედზე შემოხაზული წრის ფართობი.

11.36. იპოვეთ იმ წრის ფართობი, რომელიც შემოხაზულია ტოლფერდა სამკუთხედზე, თუ ცნობილია, რომ ამ სამკუთხედის ფუძე ტოლია 24 სმ , ფერდი კი 13 სმ -ია.

11.37. მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრია $2p$, ხოლო ჰიპოტენუზა — c . იპოვეთ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრის ფართობი.

11.38. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედში ჩახაზული წრის ფართობი, თუ კათეტების გეგმილები ჰიპოტენუზაზე უდრის 9 მ და 16 მ .

11.39. მართკუთხა სამკუთხედის პერიმეტრი უდრის 24 სმ , მისი ფართობი კი 24 სმ^2 . იპოვეთ შემოხაზული წრის ფართობი.

11.40. წრეში, რომლის ფართობია 52π , ჩახაზულია მართკუთხედი, რომლის გვერდები ისე შეეფარდებიან ერთმანეთს, როგორც $3:2$. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.

11.41. მართკუთხედის პერიმეტრი 14 სმ -ია. მასზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე კი $5\pi \text{ სმ}$. იპოვეთ მართკუთხედის ფართობი.

11.42. მართკუთხედის პერიმეტრი 44 სმ -ია, მასზე შემოხაზული წრის ფართობი კი $65\pi \text{ სმ}^2$. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

11.43. მართკუთხედის ფართობი 35 სმ^2 -ია. მასზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე კი $\sqrt{74}\pi \text{ სმ}$. იპოვეთ მართკუთხედის გვერდები.

11.44. მართკუთხედის პერიმეტრი 26 სმ -ია. ფართობი კი 40 სმ^2 . იპოვეთ მასზე შემოხაზული წრის ფართობი.

11.45. წრეზე, რომლის ფართობია Q , შემოხაზულია რომბი 30° -იანი კუთხით. იპოვეთ რომბის ფართობი.

11.46. რომბი, რომლის გვერდი მცირე დიაგონალს უდრის, R რადიუსიანი წრის ტოლდიდია. იპოვეთ რომბის გვერდი.

11.47. რომბის ფართობია $\frac{8}{\pi}$, ხოლო მასში ჩახაზული წრის ფართობი — $\sqrt{3}$. იპოვეთ რომბის მახვილი კუთხის გრადუსული ზომას.

11.48. რომბის მახვილი კუთხე არის α , ხოლო მასში ჩახაზული წრის ფართობი — S . იპოვეთ რომბის ფართობი, თუ $\sin \alpha = \frac{4}{7}$, $S = 6\pi$.

11.49. რომლის მახვილი კუთხეა α , ხოლო მასში ნახაზული წრეწირის სიგრძე უდრის l -ს. იპოვეთ რომლის ფართობი, თუ $l=5\pi$ სმ, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

11.50. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი 54-ია. იპოვეთ სამკუთხედის შიგნით მოთავსებული ყველა ისეთი კონცენტრული წრის რაოდენობა, რომლის ცენტრი სამკუთხედის სიმაღლეთა გადაკვეთის წერტილია და რადიუსი კი მთელი რიცხვია.

11.51. წრეზე შემოსახულია ტოლფერდა ტრაპეცია. ტრაპეციის მახვილი კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ წრის ფართობის ტრაპეციის ფართობთან შეფარდება, თუ $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

11.52. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძესთან მდებარე კუთხე უდრის α -ს. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოსახული წრის ფართობის შეფარდება სამკუთხედის ფართობთან, თუ $\sin \alpha = 1/4$.

11.53. იპოვეთ ტოლფერდა ტრაპეციაში ნახაზული წრის ფართობი, თუ მისი დიდი ფუძეა a , ხოლო ბლაგვი კუთხე ტოლია 120° -ის.

11.54. წრეზე შემოსახულია ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ერთი კუთხეა 150° და შუამონაკვეთი 40 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ წრის ფართობი.

11.55. ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 1 და 3, ისეთია, რომ შეიძლება ჩაისახოს და შემოსახოს წრეწირი. იპოვეთ შემოსახული წრის ფართობი.

11.56. ორი წრის საერთო ქორდით მოჭიმულია 60° და 120° რკალები. იპოვეთ ამ წრეების ფართობთა შეფარდება.

11.57. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტები უდრის 6 სმ და 8 სმ. მცირე კათეტისა და ჰიპოტენუზის შუაწერტილებზე გაყვებულია წრეწირი, რომლისთვისაც ჰიპოტენუზა მხებია. იპოვეთ ამ წრეწირით შემოსაზღვრული წრის ფართობი.

11.58. მართკუთხა სამკუთხედში ნახაზულია ნახევარწრეწირი ისე, რომ მისი დიამეტრი მდებარეობს ჰიპოტენუზაზე და მისი ცენტრი ჰიპოტენუზას ჰყოფს 15 სმ და 20 სმ სიგრძის მონაკვეთებად. იპოვეთ ნახევარწრეწირის იმ რკალის სიგრძე, რომელიც მოთავსებულია კათეტებთან მისი მხეხების წერტილებს შორის.

11.59. იპოვეთ ორ კონცენტრულ წრეწირს შორის მოთავსებული წრიული რგოლის ფართობი, თუ წრეწირების რადიუსებია 4 სმ და 6 სმ.

11.60. მოცემულია საერთო ცენტრის მქონე ორი წრე. მცირე რადიუსიანი წრეწირის მხები მეორე წრეწირს ეოვს შეფარდებით 1:5. იპოვეთ დიდი წრის ფართობის შეფარდება მცირე წრის ფართობთან.

11.61. ორი კონცენტრული წრეწირით შექმნილ რგოლში დიდი წრეწირის ქორდა ეხება მცირე წრეწირს და უდრის a -ს. იპოვეთ რგოლის ფართობი.

11.62. ორი კონცენტრული წრეწირით შემოსაზღვრული რგოლის ფართობი მცირე წრის ფართობის ტოლია. იპოვეთ მცირე წრეწირის რადიუსის შეფარდება დიდი წრეწირის რადიუსთან.

11.63. წრის ფართობი, რომლის რადიუსია R , ორი კონცენტრული წრეწირით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. იპოვეთ ამ წრეწირთა რადიუსები.

11.64. წესიერ სამკუთხედში ჩახაზულია წრეწირი და მასზე შემოხაზულია წრეწირი. იპოვეთ მიღებული რგოლის ფართობი, თუ სამკუთხედის გვერდი უდრის a -ს.

11.65. იპოვეთ წესიერ სამკუთხედში ჩახაზული წრის ფართობის შეფარდება მასზე შემოხაზული წრის ფართობთან.

11.66. იპოვეთ კვადრატზე შემოხაზული წრის ფართობის შეფარდება მასში ჩახაზული წრის ფართობთან.

11.67. წესიერ ექვსკუთხედში, რომლის გვერდია a , ჩახაზულია წრეწირი და მასზე შემოხაზულია წრეწირი. იპოვეთ მიღებული რგოლის ფართობი.

11.68. იპოვეთ წესიერ ექვსკუთხედში ჩახაზული და მასზე შემოხაზული წრეების ფართობთა შეფარდება.

11.69. იპოვეთ R რადიუსიანი წრიული სექტორის ფართობი, თუ ამ სექტორის შესაბამისი ცენტრალური კუთხეა: 1) 40° ; 2) 90° ; 3) 240° .

11.70. წრის ფართობის რა ნაწილს შეადგენს სექტორის ფართობი, თუ მისი ცენტრალური კუთხეა: 1) 180° ; 2) 45° ; 3) 18° .

11.71. იპოვეთ სექტორის ცენტრალური კუთხე, თუ სექტორის ფართობი შეადგენს წრის ფართობის: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{15}{16}$.

11.72. იპოვეთ სექტორის რადიუსი, თუ მისი ფართობი უდრის 20π -ს და ცენტრალური კუთხე 72° -ია.

11.73. იპოვეთ სექტორის კუთხე, თუ მისი ფართობი უდრის 36π -ს, ხოლო რადიუსი 6-ს.

11.74. AOB სექტორის რადიუსი 6 სმ-ია, ხოლო ფართობი -33π სმ². იპოვეთ AOB მახვილი კუთხე (O ცენტრია).

11.75. 6 სმ რადიუსიანი წრეწირის გარეთ მდებარე B წერტილიდან გავლებული მხები წრეწირს A წერტილში ეხება. C წერტილი წრეწირის ისეთი წერტილია, რომ BC მონაკვეთი ამ წრეწირის O ცენტრზე გადის. იპოვეთ AC მცირე რკალით და OA და OC რადიუსებით შემოსახლვრული ხეკტორის ფართობი, თუ $\angle ABO = 30^\circ$?

11.76. ერთი ხეკტორის რადიუსი ორჯერ მეტია მისი ტოლდონი მეორე ხეკტორის რადიუსზე. იპოვეთ მეორე ხეკტორის ცენტრალური კუთხე, თუ პირველი ხეკტორის ცენტრალური კუთხე 25° -ია.

11.77. მოცემულია ხეკტორი, რომელიც წარმოადგენს R რადიუსიანი წრის მეოთხედს. მისი რკალის შუაწერტილზე გავლებულია მხები ხეკტორის კიდური რადიუსების გაგრძელებასთან გადაკვეთამდე. იპოვეთ ამ მხების სიგრძე.

11.78. ხეკტორის ცენტრალური კუთხე უდრის 60° -ს, რადიუსი კი უდრის R -ს. იპოვეთ ხეკტორში ჩახაზული წრის რადიუსი.

11.79. ხეკტორის ცენტრალური კუთხეა α , რადიუსი კი — 6. იპოვეთ ამ ხეკტორში ჩახაზული წრის რადიუსი, თუ $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

11.80. ხეკტორის რადიუსი არის R და მისი რკალის მომჭიმავი ქორდა უდრის a -ს. იპოვეთ ამ ხეკტორში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი.

11.81. ACB რკალის ბოლოებზე გავლებულია წრეწირის მხებები D წერტილში გადაკვეთამდე. იპოვეთ ორ მხებსა და რკალს შორის მოთავსებული $DACB$ ფართობი, თუ წრეწირის რადიუსი უდრის R -ს და რკალი შეიცავს: 1) 90° -ს; 2) 120° -ს; 3) 60° -ს.

11.82. იპოვეთ ხეგმენტის ფართობი, თუ მისი რადიუსი უდრის R -ს და რკალი შეიცავს: 1) 90° ; 2) 60° ; 3) 45° ; 4) 30° -ს.

11.83. იპოვეთ ხეგმენტის ფართობი, თუ ქორდა უდრის a -ს, რკალი კი შეიცავს: 1) 120° , 2) 90° , 3) 60° -ს.

11.84. A , B და C წერტილები წრეწირზე ძეგს. AB მონაკვეთი წრეწირის დიამეტრია, $\angle BAC = 60^\circ$. იპოვეთ AC ქორდით შემოსახლვრული მცირე ხეგმენტის ფართობი, თუ წრეწირის რადიუსი 6 სმ-ია?

11.85. წრე, რომლის რადიუსია R , ჩახაზული კვადრატის გვერდის ტოლი ქორდით გაყოფილია ორ ხეგმენტად. იპოვეთ მცირე ხეგმენტის ფართობი.

11.86. R რადიუსის მქონე წრეში, ცენტრის სხვადასხვა მხარეზე გავლებულია პარალელური ქორდები, რომელთაგან ერთი

ჭიმავს 60° რკალს, ხოლო მეორე 120° . იპოვეთ ქორდებს შორის მოთავსებული წრის ნაწილის ფართობი.

11.87. წრეში ცენტრის ერთ მხარეზე გაკლებულია ორი პარალელური ქორდა, რომელთაგან ერთი ჭიმავს 120° -იან რკალს, მეორე კი — 60° -იანს. გამოთვალეთ ქორდებს შორის მო-

თავსებული წრის ნაწილის ფართობი, თუ წრის რადიუსია $2\sqrt{\frac{3}{\pi}}$.

11.88. იპოვეთ სეგმენტის ფართობი, თუ ქორდის სიგრძე უდრის $2\sqrt{\frac{6}{\pi-2}}$, რკალი კი შეიცავს 90° -ს.

11.89. ნახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდის ტოლი ქორდით წრე გაყოფილია ორ სეგმენტად. იპოვეთ მიღებულ სეგმენტთა ფართობების შეფარდება.

11.90. წრეწირში ნახაზული კვადრატის გვერდი უდრის $\frac{4}{\sqrt{\pi-2}}$. იპოვეთ კვადრატის მიერ ნამოკვეთილ სეგმენტთა ფართობების ჯამი.

11.91. სეგმენტის რკალის გრადუსული ზომაა 120° , რკალის სიგრძე კი არის 20. იპოვეთ ამ სეგმენტში ნახაზული წრეწირის სიგრძე.

11.92. ერთი და იმავე R რადიუსის მქონე ორ ურთიერთგადაკვეთ წრეთა ცენტრებს შორის მანძილი უდრის იმავე R რადიუსს. იპოვეთ ამ წრეების საერთო ნაწილის ფართობი.

ამოცანები დამტკიცებაზე

11.93. დაამტკიცეთ, რომ წრის ფართობის შეფარდება მასში ნახაზული კვადრატის ფართობთან ტოლია $\frac{\pi}{2}$ -ის.

11.94. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირში ნახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდი მის პერპენდიკულარულ რადიუსს შუაზე ჰყოფს.

11.95. დაამტკიცეთ, რომ წრეწირში ნახაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობი ტოლია ამ წრეწირზე შემოხაზული წესიერი ექვსკუთხედის ფართობის $\frac{3}{4}$ -ის.

11.96. დაამტკიცეთ, რომ $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$, სადაც r და R შესაბა-

მისად წესიერ n -კუთხედში ნახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირების რადიუსებია.

11.97. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი მრავალკუთხედის ცენტრალური კუთხე მისი გარე კუთხის ტოლია.

11.98. a_n წესიერი n -კუთხედის გვერდია, ხოლო S – ფართობი, დაამტკიცეთ, რომ $S = \frac{1}{4} n a_n^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$.

11.99. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი ექვსკუთხედის პერიმეტრი ნაკლებია მისი ტოლდიდი კვადრატის პერიმეტრზე.

11.100. დაამტკიცეთ, რომ კვადრატის პერიმეტრი მეტია მისი ტოლდიდი წრის წრეწირის სიგრძეზე.

11.101. დაამტკიცეთ, რომ თუ მრავალკუთხედში ნახაზული და მასზე შემოხაზული წრეწირები კონცენტრულია, მაშინ მრავალკუთხედი წესიერია.

11.102. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი მრავალკუთხედის შიგნით მდებარე ნებისმიერი წერტილიდან მის გვერდებადღე მანძილების ჯამი უდრის მრავალკუთხედის აპოთემის ნამრავლს მისი გვერდების რიცხვზე.

11.103. დაამტკიცეთ, რომ R რადიუსიან წრეწირში ნახაზული სამკუთხედების ფართობებიდან უდიდესი უდრის $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ -ს.

11.104. ნახევარწრეწირის დიამეტრი გაყოფილია n ტოლ ნაწილად. ყოველ მონაკვეთზე, როგორც დიამეტრზე აგებულია ნახევარწრეწირები. დაამტკიცეთ, რომ აგებული ნახევარწრეწირების სიგრძეების ჯამი მოცემული ნახევარწრეწირის სიგრძის ტოლია.

11.105. ნახევარწრის დიამეტრი გაყოფილია n ტოლ ნაწილად. ყოველ მონაკვეთზე, როგორც დიამეტრზე აგებულია ნახევარწრე. დაამტკიცეთ, რომ აგებული ნახევარწრეების ფართობების ჯამი n -ჯერ ნაკლებია მოცემული ნახევარწრის ფართობზე.

11.106. ABC რკალი შეიცავს 120° -ს; მის ბოლოებზე გავლებულია მხეხები ურთიერთგადაკვეთამდე D წერტილში და მიღებულ $ABCD$ ფიგურაში ნახაზულია წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრეწირის სიგრძე უდრის ABC რკალის სიგრძეს.

11.107. CD არის ABC მართკუთხა ($\angle C = 90^\circ$) სამკუთხედის სიმაღლე. დაამტკიცეთ, რომ ACD და BCD სამკუთხედებზე შემოხაზული წრის ფართობები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც ამ სამკუთხედების ფართობები.

11.108. ვთქვათ ∇ ესიერი ექვსკუთხედის ფართობია S , ხოლო პერიმეტრი – P . დაამტკიცეთ, რომ $S = \frac{\sqrt{3}}{24} P^2$.

11.109. დაამტკიცეთ, რომ მართკუთხა სამკუთხედის ჰიპოტენუზაზე აგებული ნახევარწრის ფართობი უდრის კათეტებზე აგებულ ნახევარწრეთა ფართობების ჯამს.

11.110. ტოლფერდა ტრაპეციაში ნახაზულია წრეწირი. დაამტკიცეთ, რომ წრის ფართობის შეფარდება ტრაპეციის ფართობთან უდრის წრეწირის სიგრძის შეფარდებას ტრაპეციის პერიმეტრთან.

11.111. დაამტკიცეთ, რომ წრიული რგოლის ფართობი იმ წრის ფართობის ტოლია, რომლის დიამეტრი მცირე წრეწირის მხებ დიდი წრეწირის ქორდას წარმოადგენს.

11.112. დაამტკიცეთ, რომ ∇ ესიერ მრავალკუთხედზე შემოხაზული და ნახაზული წრეწირების დიამეტრების კვადრატების სხვაობა მრავალკუთხედის გვერდის სიგრძის კვადრატის ტოლია.

11.113. R რადიუსიანი წრის ფართობი ორი კონცენტრული წრეწირით გაყოფილია სამ ტოლ ნაწილად. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრეწირების რადიუსები $\frac{R}{\sqrt{3}}$ და $\frac{R\sqrt{6}}{3}$ -ის ტოლია.

§12. ამოცანები აგებაზე

12.1. წრფის მოცემულ წერტილზე გაავლეთ მოცემული წრფის პერპენდიკულარული წრფე.

12.2. წრფეზე არამდებარე წერტილზე გაავლეთ ამ წრფის პარალელური წრფე.

12.3. მოცემული მონაკვეთი გაეყავით n ტოლ ნაწილად ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

12.4. კუთხე გაეყავით ოთხ ტოლ ნაწილად.

12.5. მართი კუთხე გაეყავით სამ ტოლ ნაწილად.

12.6. კუთხის გვერდებს შორის გამავალ მოცემული სხივის მოცემულ წერტილზე გაავლეთ კუთხის გვერდების გადაკვეთი წრფე ისე, რომ მანძილი ამ წერტილიდან კუთხის გვერდების გადაკვეთის წერტილებამდე ტოლი იყოს.

12.7. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და შემოხაზული წრეწირის რადიუსის მიხედვით.

12.8. ააგეთ სამკუთხედი მისი სამი გვერდის მიხედვით.

12.9. ააგეთ ტოლფერდა სამკუთხედი ფერდისა და ფუძესთან მდებარე კუთხის მიხედვით.

12.10. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი კათეტისა და ერთ-ერთი მახვილი კუთხის მიხედვით.

12.11. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი ჰიპოტენუზისა და მახვილი კუთხის მიხედვით.

12.12. ააგეთ კვადრატი: 1) გვერდის მიხედვით; 2) დიაგონალის მიხედვით.

12.13. ააგეთ მოცემული სამკუთხედის ტოლდიდი კვადრატი.

12.14. ააგეთ მოცემული ტრაპეციის ტოლდიდი კვადრატი.

12.15. ააგეთ სამკუთხედი, თუ მოცემულია გვერდი, მასთან მიმდებარე კუთხე და დანარჩენი ორი გვერდის ჯამი.

12.16. ააგეთ სამკუთხედი, თუ მოცემულია გვერდი, მასთან მიმდებარე კუთხე და დანარჩენი ორი გვერდის სხვაობა.

12.17. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი კათეტების ჯამისა და ჰიპოტენუზის მიხედვით.

12.18. ააგეთ მართკუთხა სამკუთხედი ერთ-ერთი კათეტისა და მეორე კათეტის და ჰიპოტენუზის ჯამის მიხედვით.

12.19. ააგეთ სამკუთხედი ABC , თუ მოცემულია $\angle A$, $\angle B$ და $AB+AC$.

12.20. ააგეთ სამკუთხედი ABC , თუ მოცემულია $\angle B$, $\angle C$ და $BC-AC$.

12.21. ააგეთ სამკუთხედი, თუ მოცემულია მისი ორი კუთხე და პერიმეტრი.

12.22. ააგეთ სამკუთხედი ABC , თუ მოცემულია $\angle B$, AC გვერდი და B წვეროდან AC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე.

12.23. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და ერთი მათგანისადმი გადებული მედიანის მიხედვით.

12.24. ააგეთ სამკუთხედი მისი გვერდისა და დანარჩენი ორი გვერდის მედიანების მიხედვით.

12.25. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდის და მესამე გვერდის მედიანის მიხედვით.

12.26. ააგეთ სამკუთხედი ABC , თუ მოცემულია $\angle B$, BC გვერდზე დაშვებული სიმაღლე და AC გვერდის მედიანა.

12.27. ააგეთ სამკუთხედი მისი სამი მედიანის მიხედვით.

12.28. ააგეთ პარალელოგრამი მისი გვერდებისა და ერთ-ერთი სიმაღლის მიხედვით.

12.29. ააგეთ პარალელოგრამი მისი დიაგონალებისა და ერთ-ერთი გვერდის მიხედვით.

12.30. ააგეთ სამკუთხედი მისი ორი გვერდისა და ერთ-ერთ მათგანზე დაშვებული სიმაღლის მიხედვით.

12.31. ააგეთ სამკუთხედი მისი გვერდისა და ამ გვერდზე დაშვებული სიმაღლისა და მედიანის მიხედვით.

12.32. ააგეთ სამკუთხედი ორი გვერდისა და ამ გვერდებს შორის გამავალი სამკუთხედის ბისექტრისის მიხედვით.

12.33. ააგეთ ტრაპეცია მისი ოთხი გვერდის მიხედვით.

12.34. ააგეთ ტრაპეცია მისი ფუძეების, ერთ-ერთი ფერდისა და სიმაღლის მიხედვით.

12.35. ააგეთ ტრაპეცია მისი ფუძეებისა და დიაგონალების მიხედვით.

12.36. მოცემულ ორ წერტილზე გაავლეთ მოცემული რადიუსის წრეწირი.

12.37. იპოვეთ მოცემული წრეწირის ცენტრი.

12.38. მოცემული რკალი გაყავით ორ ტოლ ნაწილად.

12.39. მოცემულ წერტილზე გაავლეთ წრფე, რომელსაც მოცემული წრეწირი მოცემული სიგრძის ქორდას ჩამოაჭრის.

12.40. წრეწირის შიგნით მდებარე წერტილზე გაავლეთ ქორდა ისე, რომ იგი ამ წერტილით შუაზე იყოფოდეს.

12.41. წრეწირის გარეთ მდებარე მოცემულ წერტილზე გაავლეთ ამ წრეწირის მხები.

12.42. გაავლეთ მოცემული ორი წრეწირის საერთო გარე მხები.

12.43. გაავლეთ მოცემული ორი წრეწირის საერთო შიგა მხები.

12.44. ააგეთ ტოლფერდა სამკუთხედი მისი ფუძისა და ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსის მიხედვით.

12.45. იპოვეთ წრეწირის მოცემულ წერტილზე გამავალ ქორდათა შუაწერტილების გეომეტრიული ადგილი.

§13. სხვადასხვა სახის ამოცანები

ამოცანები გამოთვლაზე

13.1. ABC სამკუთხედში $\angle A$ ორჯერ მეტია $\angle B$ -ზე. $AC=b$, $AB=c$. იპოვეთ BC .

13.2. რომბის გვერდია a , ხოლო მახვილი კუთხე α . რომბის ბლაგვი კუთხის ერთი წვეროდან გამოსული ორი სხივი რომბს

სამ ტოლდიდ ნაწილად ყოფს. იპოვეთ ამ სხივების რომბის შიგნით მოთავსებული მონაკვეთები.

13.3. $ABCD$ კვადრატის შიგნით აღებულია M წერტილი ისე, რომ $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle MCD = 15^\circ$. იპოვეთ $\angle MBC$.

13.4. იპოვეთ მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეები, თუ მასზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი ისე შეეფარდება მასში ჩახაზული წრეწირის რადიუსს, როგორც 5:2.

13.5. D წერტილი ძევს ABC ტოლგვერდა სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მცირე AB რკალზე. იპოვეთ DC , თუ $AD=a$ და $BD=b$.

13.6. სამი წრეწირი წვეილ-წვეილად ეხება ერთმანეთს გარედან. ორი მათგანის რადიუსია 3, ხოლო მესამის 1. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, სადაც A , B და C წრეწირების შეხების წერტილებია.

13.7. სამკუთხედის შიგნით აღებულ წერტილზე გავლებულია სამკუთხედის გვერდების პარალელური წრფეები. ეს წრფეები სამკუთხედს ყოფს ექვს ნაწილად, რომელთაგან სამი სამკუთხედი, შესაბამისად S_1 , S_2 და S_3 ფართობებით. იპოვეთ მოცემული სამკუთხედის ფართობი.

13.8. პარალელოგრამში, რომლის გვერდებია a და b და კუთხეა α , გავლებულია შიგა კუთხეების ბისექტრისები. იპოვეთ ბისექტრისებით შემოსაზღვრული ოთხკუთხედის ფართობი.

13.9. სამკუთხედის ორი გვერდია $\sqrt{13}$ და $\sqrt{10}$. იპოვეთ მესამე გვერდი, თუ იგი მასზე დაშვებული სიმაღლის ტოლია.

13.10. ABC მახვილკუთხა სამკუთხედში გავლებულია AA_1 , BB_1 და CC_1 სიმაღლეები. იპოვეთ $A_1B_1C_1$ და ABC სამკუთხედების ფართობების შეფარდება, თუ ABC სამკუთხედის კუთხეები ცნობილია.

13.11. ABC სამკუთხედის $AB=4$ და $AC=2$ გვერდებზე, როგორც დიამეტრებზე, აგებულია ნახევარწრეწირები. მიღებული ორი ნახევარწრეწირის საერთო ნაწილში ჩახაზულია წრეწირი, რომლის ცენტრი, ნახევარწრეწირების ცენტრთა ხაზზე მდებარეობს, იპოვეთ ამ წრეწირის რადიუსი, თუ $\angle A=120^\circ$.

13.12. $r=1$ რადიუსიანი წრეწირი შიგნიდან ეხება $R=3$ რადიუსიან წრეწირს. იპოვეთ იმ წრეწირის რადიუსი, რომელიც ეხება ორივე წრეწირს და მათ ცენტრებზე გაშვებულ წრფეს.

13.13. წრეწირში, რომლის რადიუსია 1, ჩახაზულია წესიერი სამკუთხედი და კვადრატი, რომელთაც საერთო წვერო აქვთ. იპოვეთ მათი საერთო ნაწილის ფართობი.

13.14. ABC მართკუთხა სამკუთხედში AK ბისექტრისაზე, როგორც დიამეტრზე, აგებული წრეწირი AC ჰიპოტენუზას გადაკ-

ვეთს E წერტილში. რა ფარდობით ყოფს მართი კუთხის წვეროდან პიპოტენუზაზე დაშვებული სიმაღლე პიპოტენუზას, თუ $AE:CE=m$.

13.15. წრეწირები, რომელთა რადიუსებია 2, 3 და 5, წვეილ-წვეილად ეხება ერთმანეთს გარედან. იპოვეთ დიდი წრეწირის ქორდა, რომელიც მცირე წრეწირების საერთო შიგა მხებზე ძევს.

13.16. იპოვეთ ნახაზული ოთხკუთხედის დიაგონალები, თუ მოცემულია მისი გვერდები a , b , c და d .

13.17. იპოვეთ სამკუთხედის ფართობის შეფარდება იმ სამკუთხედის ფართობთან, რომლის გვერდები მოცემული სამკუთხედის მედიანების ტოლია.

13.18. მარტკუთხა სამკუთხედის კათეტებია a და b . იპოვეთ სამკუთხედის მართი კუთხის ბისექტრისა.

13.19. ტოლფერდა ტრაპეციის ფუძეებია 21 სმ და 9 სმ, ხოლო სიმაღლე 8 სმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციაზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

13.20. 5 სმ რადიუსიან წრეწირში გავლებულია ორი AB და CD ურთიერთპერპენდიკულარული ქორდა. AB ქორდის ბოლოებზე გავლებული დიამეტრები CD ქორდას სამ ტოლ ნაწილად ჰყოფენ. იპოვეთ CD , თუ $AB=8$.

13.21. r რადიუსიან წრეწირში ნახაზულია სამკუთხედი, რომლის მცირე გვერდებია $\frac{1}{2}r$ და $r\sqrt{3}$. იპოვეთ მესამე გვერდი.

13.22. $ABCD$ ტრაპეციაში ნახაზულია r რადიუსიანი წრეწირი. იპოვეთ $AMND$ ოთხკუთხედის ფართობი, სადაც M და N წრეწირის ფერდებთან შეხების წერტილებია, თუ $\angle A=\angle D=60^\circ$.

13.23. $ABCD$ რომბის ფართობი 2-ის ტოლია. ABD სამკუთხედში ნახაზული წრეწირი AB გვერდს K წერტილში ეხება. K წერტილზე გავლებულია AC დიაგონალის პარალელური KL წრფე (L წერტილი BC გვერდზე ძევს). იპოვეთ BAD კუთხე, თუ BLK სამკუთხედის ფართობი S -ის ტოლია.

13.24. წრეწირში ნახაზულია $ABCD$ ტრაპეცია. CD ფერდით მოჭიმული რკალის E წერტილი შეერთებულია ტრაპეციის ყველა წვეროსთან. იპოვეთ ABE სამკუთხედის პერიმეტრის შეფარდება მასში ნახაზული წრეწირის რადიუსთან, თუ $\angle CED=120^\circ$ და $\angle ABE=\angle BAE$.

13.25. იპოვეთ კუთხე სამკუთხედის β -ს ტოლი კუთხის წვეროდან გამოსულ სიმაღლეხა და მედიანას შორის, თუ სამკუთხედის დანარჩენი ორი კუთხეა α და γ .

13.26. სამკუთხედში ერთ-ერთი კუთხე დანარჩენი ორი კუთხის სხვაობის ტოლია. უმცირესი გვერდი 1-ის ტოლია, ხოლო დანარჩენ ორ გვერდზე აგებულ კვადრატთა ფართობების ჯამი ორჯერ მეტივ ამ სამკუთხედზე შემოსახული წრის ფართობზე. იპოვეთ სამკუთხედის უდიდესი გვერდი.

13.27. ABC სამკუთხედის BC გვერდზე აღებულია M წერტილი. BD ბისექტრისა AM მონაკვეთს K წერტილში. K -ის იპოვეთ AB , თუ $AB+BC=3$, $AB+BM=2$ და $\frac{S_{AKD}}{S_{ABC}} = \frac{1}{6}$.

13.28. $ABCD$ ტოლგვერდა ტრაპეციაში $AD=10$, $BC=2$, $AB=CD=5$. BAD კუთხის ბისექტრისა BC სხივს გადაკვეთს K წერტილში. იპოვეთ ABK სამკუთხედის BM ბისექტრისა.

13.29. იპოვეთ ტრაპეციის ფართობი, თუ მისი დიაგონალებია 5 სმ და 3 სმ, ხოლო ფუძეების შუა წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთი 2 სმ-ია.

13.30. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის BC გვერდზე აღებულია K წერტილი ისე, რომ $BC=5BK$. სამკუთხედის ცენტრზე და K წერტილზე გაშვებული წრე AC -ს გადაკვეთს N წერტილში. იპოვეთ ABC სამკუთხედის ფართობი, თუ $ON=1$.

13.31. R და r რადიუსიანი წრეწირები ეხებიან ერთმანეთს გარედან C წერტილში. გავლებულია AB მათი საერთო გარე მხები (A და B შეხების წერტილებია). იპოვეთ ABC სამკუთხედის გვერდები.

13.32. ABC ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი 6-ის ტოლია. F არის AC გვერდის შუა წერტილი. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან BCF სამკუთხედის მედიანების გადაკვეთის წერტილამდე.

13.33. მოცემულია წრეწირი, რომლის ცენტრი $ABCD$ ოთხკუთხედის AD გვერდის შუაწერტილში ძევს და ეხება დანარჩენ სამ გვერდს. იპოვეთ AD , თუ $AB=12$ და $CD=75$.

ამოცანები დამტკიცებაზე

13.34. ორი კონცენტრული წრეწირიდან მცირე წრეწირი დიდ წრეს ეოვს ორ ტოლდიდ ნაწილად. დაამტკიცეთ, რომ მცირე წრეწირის პარალელურ მხებებს შორის მოთავსებული რგოლის ნაწილის ფართობი მცირე წრეწირში ჩახსხული კვადრატის ფართობზე ორჯერ მეტია.

13.35. h მართკუთხა სამკუთხედში პიპიტენუსაზე დაშვებული სიმაღლეა, ხოლო r ჩახაზული წრეწირის რადიუსია. დაამტკიცეთ, რომ $0,4 < \frac{r}{h} < 0,5$.

13.36. დაამტკიცეთ, რომ, თუ A, B, C – ბლაგაკუთხა სამკუთხედის კუთხეებია, მაშინ $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C < 0$.

13.37. ტოლფერდა სამკუთხედის ფუძეა a , ფერდი – b , ხოლო წვეროსთან მდებარე კუთხე უდრის 20° -ს. დაამტკიცეთ, რომ $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

13.38. ტოლგვერდა სამკუთხედის ცენტრზე გავლებულია წრფე. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხედის წვეროებიდან ამ წრფემდე მანძილების კვადრატების ჯამი არ არის დამოკიდებული წრფის შერწყვაზე და გვერდის კვადრატის ნახევრის ტოლია.

13.39. მოცემულ წრეწირში ჩახაზულია მოცემული $AC=a$ გვერდის მქონე ABC სამკუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ ამ სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი უდრის, როდესაც $AB=BC$.

13.40. დაამტკიცეთ, რომ ნებისმიერ ABC სამკუთხედში აღებული აქვს უტოლობას $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

13.41. დაამტკიცეთ, რომ ორი ტრაპეცია ტოლია, თუ მათი შესაბამისი გვერდები ტოლია.

13.42. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ოთხკუთხედის რომელიმე ორი მოპირდაპირე არაპარალელური გვერდების შუაწერტილების შემადგენელი მონაკვეთი დანარჩენი ორი გვერდის ნახევარჯამის ტოლია, მაშინ ეს ოთხკუთხედი ტრაპეციაა.

13.43. დაამტკიცეთ, რომ, თუ ოთხკუთხედის დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ მათი გადაკვეთის წერტილის გვერდები ოთხივე გვერდზე, მდებარეობენ ერთ წრეწირზე.

13.44. დაამტკიცეთ, რომ $ABCD$ პარალელოგრამის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$a) S = \frac{1}{4}(AC^2 - BD^2)\operatorname{tg} A.$$

$$b) S = \frac{1}{2}(AB^2 - AD^2)\operatorname{tg} \angle AOD,$$

ხადაც O დიაგონალების გადაკვეთის წერტილია.

13.45. ტრაპეციაზე შემოხაზული და მასში ჩახაზული წრეწირების რადიუსებია შესაბამისად R და r . დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha}}{\sin^2 \alpha},$$

სადაც α ტრაპეციის კუთხეა.

13.46. დაამტკიცეთ, რომ, თუ სამკუთხედის a , b , c გვერდები ადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას, მაშინ $ac=6Rr$, სადაც R და r სამკუთხედზე შემოსაზღვრი და ჩასახული წრეწირების რადიუსებია.

13.47. R რადიუსიანი ხემატორში ჩახსხვლია r რადიუსიანი წრეწირი. ხემატორის ქორდა $2a$ -ს ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

13.48. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $AB \perp CD$ და $AC \perp BD$, მაშინ $AD \perp BC$.

სტერეომეტრია

§14. სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები. წრფეთა და სიბრტყეთა პარალელობა და მართობულობა

ამოცანები გამოთვლაზე

14.1. სიბრტყიდან 30-ის ტოლი მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია დახრილი. იპოვეთ ამ დახრილის სიგრძე, თუ მისი გვერდი სიბრტყეზე 40-ის ტოლია.

14.2. A წერტილიდან α სიბრტყისადმი გავლებულია პერპენდიკულარი და დახრილი, რომლებიც ერთმანეთთან 60° -იან კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ დახრილის სიგრძე, თუ პერპენდიკულარის სიგრძე 7-ის ტოლია.

14.3. A წერტილი სიბრტყიდან დაშორებულია h მანძილით. იპოვეთ A წერტილიდან გავლებულ იმ დახრილთა სიგრძეები, რომლებიც სიბრტყესთან ადგენენ შემდეგ კუთხეებს: 1) 30° , 2) 45° , 3) 60° .

14.4. დახრილი a -ს ტოლია. რას უდრის ამ დახრილის გვერდი სიბრტყეზე, თუ დახრილის მიერ სიბრტყესთან შედგენილი კუთხე: 1) 45° -ია, 2) 60° -ია, 3) 30° -ია?

14.5. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულ პერპენდიკულარსა და დახრილს შორის კუთხე α -ს ტოლია. დახრილის სიგრძეა a . იპოვეთ მანძილი წერტილიდან სიბრტყემდე, თუ $a=10$, $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

14.6. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია პერპენდიკულარი და დახრილი. პერპენდიკულარის სიგრძე 6 სმ-ია, დახრილისა კი 9 სმ. იპოვეთ პერპენდიკულარის გვერდი დახრილზე.

14.7. მოცემული წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 15 და 20. პირველის გვერდი სიბრტყეზე 9-ის ტოლია. იპოვეთ მეორე დახრილის გვერდი.

14.8. წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთა სიგრძეებია 10 სმ და 17 სმ. ამ დახრილთა გვერდებს შორის სხვაობა 9 სმ-ია. იპოვეთ დახრილთა გვერდები.

14.9. წერტილიდან სიბრტყისადმი გავლებულია ორი დახრილი, რომელთაგან ერთი მეორეზე 26 სმ-ით მეტია. დახრილთა

გვერდები 12 სმ-ისა და 40 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ დახრილობა სიგრძეები.

14.10. წერტილიდან სიბრტეისადმი გავლებულია ორი დახრილობი. იპოვეთ დახრილობა სიგრძეები, თუ ისინი ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2 და დახრილობა გვერდები 1 სმ-ისა და 7 სმ-ის ტოლია.

14.11. წერტილიდან სიბრტეისადმი გავლებულია ორი დახრილობი, რომელთა სიგრძეებია 23 სმ და 33 სმ. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სიბრტეემდე, თუ დახრილობა გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3.

14.12. მოცემული წერტილი სიბრტეიდან დაშორებულია $5\sqrt{2}$ -ით. ამ წერტილიდან ამავე სიბრტეისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილობი, რომლებიც სიბრტეესთან ადგენენ 30° -იან კუთხეს, ხოლო ერთიერთ-შორის 90° -ს. იპოვეთ მანძილი დახრილობის ფუძეებს შორის.

14.13. სიბრტეიდან 1 მ მანძილით დაშორებული წერტილიდან ამ სიბრტეისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილობი. იპოვეთ მანძილი დახრილობა ფუძეებს შორის, თუ დახრილობი ერთიერთ-მართობულია და სიბრტეისადმი გავლებულ მართობთან ქმნიან 60° -იან კუთხეებს.

14.14. სიბრტეიდან 12-ის ტოლი მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილობი, რომლებიც სიბრტეესთან 30° -იან კუთხეებს ადგენენ. ამასთან მათი გვერდები ერთმანეთთან 120° -იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ მანძილი დახრილობა ფუძეებს შორის.

14.15. სიბრტეიდან a მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილობი, რომლებიც სიბრტეესთან ადგენენ 45° -იან კუთხეებს, ხოლო ერთმანეთთან 60° -იან კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილობა ფუძეებს შორის.

14.16. სიბრტეიდან a მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილობი, რომლებიც სიბრტეესთან ადგენენ 45° -იან და 30° -იან კუთხეებს, ხოლო ერთმანეთთან – მართ კუთხეს. იპოვეთ მანძილი დახრილობა ფუძეებს შორის.

14.17. სიბრტეიდან d მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი დახრილობი, რომლებიც სიბრტეესთან ადგენენ α და β კუთხეებს, ხოლო ერთმანეთთან მართ კუთხეს. იპოვეთ დახრილობა ბოლოებს შორის მანძილი, თუ $d=13$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$,

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

14.18. მოცემული წერტილიდან სიბრტეისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი სიგრძით $7\sqrt{2}$. მათ შორის კუთხე 60° -ია, ხოლო მათ გვერდებს შორის კუთხე არის 90° . იპოვეთ მანძილი მოცემული წერტილიდან სიბრტეამდე.

14.19. მოცემული წერტილიდან სიბრტეისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი; მათ შორის კუთხე 60° -ია, მათ გვერდებს შორის კუთხე კი მართია. იპოვეთ თითოეულ დახრილსა და მის გვერდს შორის მდებარე კუთხეები.

14.20. სიბრტეის გარეთ მდებარე წერტილიდან ამ სიბრტეისადმი გავლებულია ორი ტოლი დახრილი. დახრილთა შორის კუთხეა φ , ხოლო მათ გვერდებს შორის კუთხე კი α . იპოვეთ კუთხე დახრილებსა და სიბრტეეს შორის, თუ $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

14.21. სიბრტეიდან d მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი ტოლი დახრილი, რომელთა სიგრძეა l . დახრილებს შორის კუთხეა φ . იპოვეთ კუთხე დახრილთა გვერდებს შორის, თუ $d=5$, $l=7$, $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{7}$.

14.22. სიბრტეიდან h მანძილით დაშორებული წერტილიდან გავლებულია ორი ტოლი დახრილი, რომელთა სიგრძეა a . დახრილთა გვერდებს შორის კუთხეა α . იპოვეთ კუთხე დახრილებს შორის, თუ $h=2$, $a=6$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$.

14.23. AB მონაკვეთი სიბრტეის პარალელურია და $AB=4.5$. A_1 არის A წერტილის გვერდის ამ სიბრტეესზე. იპოვეთ BA_1 , თუ იგი სიბრტეესთან ადგენს 60° -იან კუთხეს.

14.24. სიბრტეის პარალელური AB მონაკვეთის ბოლოებიდან სიბრტეისადმი გავლებულია AC და BD დახრილები. AC დახრილი სიბრტეესთან ადგენს α კუთხეს. გამოთვალეთ ამ სიბრტეისადმი BD -ს დახრის კუთხე, თუ $AC=\sqrt{6}$, $BD=3$, $\alpha=60^\circ$.

14.25. სიბრტეის პარალელური AB მონაკვეთის ბოლოებიდან ამ სიბრტეისადმი გავლებულია AC მართობი და BD დახრილი, რომელიც AB მონაკვეთის მართობულია. იპოვეთ CD , თუ $AB=21$, $AC=15$, $BD=25$.

14.26. A და B წერტილებიდან სიბრტეესზე დაშვებულია მართობები, რომელთა სიგრძეებია 12 და 7, ხოლო მათ ფუძეებს

შორის მანძილი 12-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის, თუ AB მონაკვეთი სიბრტყეს არ კვეთს.

14.27. 20-ის ტოლი მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 17-ის და 5-ის ტოლი მანძილებით. იპოვეთ მონაკვეთის გვერდის სიბრტყეზე, თუ იგი სიბრტყეს არ კვეთს.

14.28. მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 20-ის და 120-ის ტოლი მანძილებით. იპოვეთ მანძილი მონაკვეთის შუაწერტილიდან სიბრტყემდე, თუ მონაკვეთი სიბრტყეს არ კვეთს.

14.29. მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს. მონაკვეთის ბოლოებიდან მანძილები სიბრტყემდე 6 სმ და 10 სმ-ია, ხოლო მონაკვეთის გვერდის სიგრძე სიბრტყეზე 12 სმ-ია. იპოვეთ მონაკვეთის სიგრძე.

14.30. 1 მ სიგრძის მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს. მონაკვეთის ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 0,5 მ-ითა და 0,3 მ-ით. იპოვეთ მონაკვეთის გვერდის სიგრძე.

14.31. მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს. მისი ბოლოები სიბრტყიდან დაშორებულია 8 სმ-ით და 2 სმ-ით. იპოვეთ მანძილი ამ მონაკვეთის შუა წერტილიდან სიბრტყემდე.

14.32. α სიბრტყის A წერტილიდან გავლებულია დახრილი და მასზე აღებულია B და C წერტილები. იპოვეთ მანძილი C წერტილიდან α სიბრტყემდე, თუ მანძილი B წერტილიდან α სიბრტყემდე არის 6, $AB=8$ და $AC=20$.

14.33. სიბრტყეზე გავლებულია ორი პარალელური წრფე, რომელთა შორის მანძილი 12-ის ტოლია. A წერტილი ამ წრფეებიდან თანაბრად დაშორებული, ხოლო სიბრტყიდან კი $\sqrt{13}$ -ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მანძილი A წერტილიდან თითოეულ წრფემდე.

14.34. მოცემული წერტილიდან კვადრატის თითოეულ წვერამდე მანძილი 18-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კვადრატის სიბრტყემდე, თუ კვადრატის გვერდი 16-ის ტოლია.

14.35. მოცემული წერტილიდან კვადრატის თითოეულ გვერდამდე მანძილი 9-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან კვადრატის სიბრტყემდე, თუ კვადრატის დიაგონალი 16-ის ტოლია.

14.36. კვადრატის O ცენტრიდან კვადრატის სიბრტყისადმი აღმართულია OM პერპენდიკულარი. M წერტილიდან AB გვერდისადმი გავლებულია MK პერპენდიკულარი. იპოვეთ $\angle MKO$, თუ $AB=10\sqrt{3}$, $OM=15$.

14.37. წრის ცენტრიდან მისი სიბრტეისადმი აღმართულია პერპენდიკულარი, რომლის სიგრძეა 7. იპოვეთ მანძილი პერპენდიკულარის ბოლოდან წრეწირის წერტილებამდე, თუ წრის ფართობია 51π .

14.38. სამკუთხედში ნახაზული წრეწირის ცენტრიდან ამ სამკუთხედის სიბრტეისადმი აღმართულია მართობი, რომლის სიგრძეა 9. იპოვეთ მანძილი ამ მართობის ბოლოდან სამკუთხედის გვერდებამდე, თუ წრეწირის რადიუსი 12-ის ტოლია.

14.39. მოცემული წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტეამდე მანძილი 15-ის ტოლია, ხოლო თითოეულ წვერომდე მანძილი 17-ის ტოლია. იპოვეთ ამ სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი.

14.40. ტოლგვერდა სამკუთხედის გვერდი 30-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის სიბრტეამდე იმ წერტილიდან, რომელიც სამკუთხედის თითოეული წვეროდან დაშორებულია 20-ის ტოლი მანძილით.

14.41. წესიერი სამკუთხედის გვერდი $7\sqrt{6}$ -ის ტოლია. M წერტილი ისეა შერჩეული, რომ მონაკვეთები, რომლებიც მას სამკუთხედის წვეროებთან აერთებს სამკუთხედის სიბრტეესთან, 45° -იან კუთხეებს ადგენენ. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე.

14.42. მოცემული წერტილი ტოლგვერდა სამკუთხედის სიბრტეიდან 6-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. მონაკვეთები, რომლებიც ამ წერტილს სამკუთხედის წვეროებთან აერთებს, სამკუთხედის სიბრტეესთან 30° -იან კუთხეებს ადგენენ. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი.

14.43. წესიერი სამკუთხედის გვერდი a -ს ტოლია. M წერტილი ისეა შერჩეული, რომ მონაკვეთები, რომლებიც მას სამკუთხედის წვეროებთან აერთებს, სამკუთხედის სიბრტეესთან α კუთხეს ქმნიან. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტეემდე, თუ $a=8$, $\alpha=2\sqrt{3}$.

14.44. მოცემული წერტილი თანაბრადაა დაშორებული წესიერი სამკუთხედის ყველა წვეროდან და 8-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული სამკუთხედის სიბრტეიდან. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სამკუთხედის გვერდებამდე, თუ სამკუთხედის გვერდი $12\sqrt{3}$ -ის ტოლია.

14.45. მოცემული წერტილი წესიერი სამკუთხედის თითოეული გვერდიდან 8-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული, ხოლო სამკუთხედის სიბრტეიდან კი 4-ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ სამკუთხედის გვერდი.

14.46. მოცემული წერტილი წესიერი სამკუთხედის თითოეული წვეროდან დაშორებულია 10-ის ტოლი მანძილით, ხოლო გვერდებიდან კი $2\sqrt{13}$ -ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

14.47. მოცემული წერტილი წესიერი სამკუთხედის თითოეული გვერდიდან 10-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე, თუ სამკუთხედის გვერდი 30-ის ტოლია.

14.48. მოცემული წერტილი მართკუთხა სამკუთხედის თითოეული წვეროდან 13-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული, ხოლო სამკუთხედის სიბრტყიდან კი 12-ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ სამკუთხედის პიპოტენუსა.

14.49. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 12 და 16. მოცემული წერტილი სამკუთხედის წვეროებიდან 26-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე.

14.50. ტოლგვერდა ABC სამკუთხედის წვეროდან ამ სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია AD მართობი. იპოვეთ მანძილი D წერტილიდან BC გვერდამდე, თუ $AD=13$, $BC=6$.

14.51. ABC მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 15 და 20. C მართი კუთხის წვეროდან სამკუთხედის სიბრტყისადმი აღმართულია CM პერპენდიკულარი, რომლის სიგრძე 5-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან პიპოტენუსამდე.

14.52. მოცემული წერტილი ABC სამკუთხედის თითოეული წვეროდან 10-ის ტოლი მანძილითაა დაშორებული. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან სამკუთხედის სიბრტყემდე, თუ $BC=15$, $\angle A=60^\circ$.

14.53. 30° -იან ორწახნაგა კუთხის ერთ წახნაგზე მოცემულია წერტილი, რომელიც მეორე წახნაგიდან დაშორებულია 48-ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე.

14.54. α სიდიდის ორწახნაგა კუთხის ერთ-ერთ წახნაგზე, მოცემულია წერტილი, რომელიც წიბოდან დაშორებულია a მანძილით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან მეორე წახნაგამდე, თუ $a=36$, $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.

14.55. 60° -იანი ორწახნაგა კუთხის შიგნით აღებული წერტილი თითოეული წახნაგიდან დაშორებულია 24-ის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან წიბომდე.

14.56. α ხიდის ორწახნაგა კუთხის შიგნით მოცემულია წერტილი, რომელიც a მანძილითაა დაშორებული თითოეული წახნაგიდან. იპოვეთ მანძილი ამ წერტილიდან ორწახნაგა კუთხის წიბამდე, თუ $a=12$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$.

14.57. ABC სამკუთხედის BC გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყესთან φ კუთხეს ქმნის. იპოვეთ მანძილი A წვეროდან სიბრტყემდე, თუ $AB=29$, $BC=36$, $AC=25$ და $\sin \varphi = \frac{2}{5}$.

14.58. ორ ტოლფერდა სამკუთხედს აქვთ საერთო ფუძე და მათი სიბრტყეები დახრილია ერთმანეთისადმი 60° -ით. საერთო ფუძის სიგრძეა 16, ერთი სამკუთხედის ფერდის სიგრძეა 17, ხოლო მეორე სამკუთხედის ფერდები ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედების წვეროებს შორის.

14.59. ორწახნაგა კუთხის წახნაგებზე მდებარე A და B წერტილებიდან კუთხის წიბოზე დაშვებულია AA_1 და BB_1 მართობები. იპოვეთ AB მონაკვეთის სიგრძე, თუ $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ და ორწახნაგა კუთხე α -ს ტოლია.

14.60. ორ მართკუთხა ტოლფერდა სამკუთხედს საერთო პიპოტენუზა აქვთ და მათი სიბრტყეები ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ მანძილი მართი კუთხეების წვეროებს შორის, თუ პიპოტენუზის სიგრძეა $5\sqrt{2}$.

ამოცანები დამტკიცებაზე

14.61. A , B , C და D წერტილები ერთ სიბრტყეში არ ძეგს. დაამტკიცეთ, რომ AB და CD წრფეები ერთმანეთს არ კვეთს.

14.62. A , B , C წერტილები ერთდროულად ორ სხვადასხვა სიბრტყეს ეკუთვნის. დაამტკიცეთ, რომ ეს წერტილები ერთ წრფეზე ძეგს.

14.63. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორი პარალელური წრფიდან ერთ-ერთი რაიმე სიბრტყეს კვეთს, მაშინ მეორე წრფეც იმავე სიბრტყეს კვეთს.

14.64. დაამტკიცეთ, რომ თუ AB და CD წრფეები ერთ სიბრტყეში არ ძეგს, მაშინ AC და BD წრფეებიც არ ძეგს ერთ სიბრტყეში.

14.65. მოცემულია ოთხი წერტილი, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ ძეგს. რამდენი სხვადასხვა ისეთი სიბრტყის გავლება

შეიძლება, რომელიც მოცემული ოთხიდან სამ წერტილზე გაივლოს?

14.66. მოცემულია ოთხი წერტილი. ცნობილია, რომ ნებისმიერ ორ მოცემულ წერტილზე გამავალი წრფე არ კვეთს დანარჩენ ორ წერტილზე გამავალ წრფეს. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული ოთხი წერტილი ერთ სიბრტყეში არ ძეგს.

14.67. A, B, C, D წერტილები ერთ სიბრტყეში არ ძეგს. დაამტკიცეთ, რომ AB და BC მონაკვეთების შუაწერტილებზე გამავალი წრფე პარალელურია AD და CD მონაკვეთების შუაწერტილებზე გამავალი წრფისა.

14.68. მოცემულია A, B, C, D წერტილები, ერთ სიბრტყეს არ ეკუთვნიან. დაამტკიცეთ, რომ AB, BC, CD, DA მონაკვეთების შუა წერტილები ეკუთვნიან ერთ სიბრტყეს. რა ფიგურის წვეროებია ეს წერტილები?

14.69. მოცემულია ოთხი A, B, C, D წერტილი, რომლებიც ერთ სიბრტყეში არ ძეგს. დაამტკიცეთ, რომ AB და CD, AC და BD, AD და BC მონაკვეთების შუაწერტილების შემაერთებული წრფეები ერთ წერტილში გადაიკვეთებიან.

14.70. დაამტკიცეთ, რომ ყველა ის წრფე, რომელიც მოცემულ წერტილზე მოცემული სიბრტყის პარალელურად გადის, ერთ სიბრტყეში ძეგს.

14.71. ორი პარალელური სიბრტყიდან ერთ-ერთზე მდებარე ABC სამკუთხედის წვეროებზე გავლებულია პარალელური წრფეები, რომლებიც მეორე სიბრტყეს A_1, B_1 და C_1 წერტილებში კვეთს. დაამტკიცეთ, რომ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები ტოლია.

14.72. ერთ წერტილზე გამავალი სამი წრფე მოცემულ სიბრტყეს კვეთს A, B, C წერტილებში, ხოლო ამ სიბრტყის პარალელურ სიბრტყეს – A_1, B_1, C_1 წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ ABC და $A_1B_1C_1$ სამკუთხედები მსგავსია.

14.73. სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრზე გავლებულია სამკუთხედის სიბრტყის მართობული წრფე. დაამტკიცეთ, რომ წრფის ყოველი წერტილი თანაბრადია დაშორებული სამკუთხედის წვეროებიდან.

14.74. D წერტილი თანაბრადია დაშორებული წესიერი სამკუთხედის წვეროებიდან და მის სიბრტყეს არ ეკუთვნის. დაამტკიცეთ, რომ D წერტილზე და სამკუთხედის ცენტრზე გამავალი წრფე, სამკუთხედის სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

14.75. სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრზე გავლებულია წრფე, რომელიც სამკუთხედის სიბრტყის მართობულია. დაამტკიცეთ, რომ ამ წრფის ყოველი წერტილი ერთნაირადია დაშორებული სამკუთხედის გვერდებიდან.

14.76. მონაკვეთის შუაწერტილზე გავლებულია სიბრტყე, დაამტკიცეთ, რომ მონაკვეთის ბოლოები ერთნაირადაა დაშორებული ამ სიბრტყიდან.

14.77. დაამტკიცეთ, რომ მანძილი მონაკვეთის შუაწერტილიდან სიბრტყემდე უდრის მონაკვეთის ბოლოებიდან სიბრტყემდე მანძილებს: 1) ნახევარჯამს, თუ მონაკვეთი სიბრტყეს არ კვეთს; 2) სხვაობის მოდულის ნახევარს, თუ მონაკვეთი კვეთს სიბრტყეს.

14.78. $ABCD$ მართკუთხედის სიბრტყისადმი A წვეროდან გავლებულია AM პერპენდიკულარი. დაამტკიცეთ, რომ MBC და MDC სამკუთხედები მართკუთხაა.

14.79. $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის O წერტილიდან გავლებულია OM მონაკვეთი ისე, რომ $MA=MC$ და $MB=MD$. დაამტკიცეთ, რომ OM წრფე პარალელოგრამის სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

14.80. დაამტკიცეთ, რომ თუ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ერთი კათეტი α სიბრტყეზეა, ხოლო მეორე კათეტი ამ სიბრტყესთან 45° -იან კუთხეს ქმნის, მაშინ ჰიპოტენუზა α სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს შეადგენს.

14.81. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამი წრფიდან ყოველი ორი იკვეთება, მაშინ წრფეები ან ერთ სიბრტყეში მდებარეობენ, ან ერთ წერტილში იკვეთებიან.

14.82. დაამტკიცეთ, რომ ორწახნაგა კუთხის წახნაგების გადამკვეთი წრფე ერთიდაიმავე კუთხეს ადგენს წახნაგებთან მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც გადაკვეთის წერტილები ტოლი მანძილებითაა დაშორებული წიბოდან.

§15. ვექტორები.

ამოცანები გამოთვლაზე

15.1. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

3) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

B

C

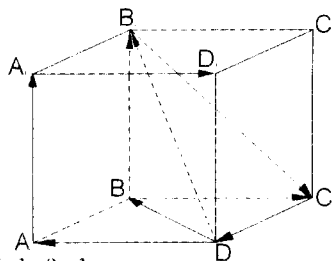
A

D

15.2. მოცემულია $ABCD$ და $B_1C_1D_1$ პარალელეპიპედი. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ:

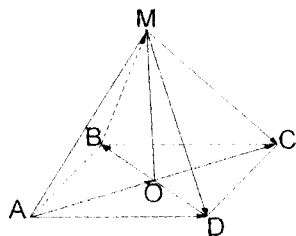
1) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB_1}$

- 2) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{B_1C}$
- 3) $-\overrightarrow{B_1C} - \overrightarrow{CD}$
- 4) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C}$
- 5) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{DA}$
- 6) $\overrightarrow{DB_1} + \overrightarrow{A_1D_1} - \overrightarrow{AA_1}$



15.3. მოცემულია $MABCD$ პირამიდა. ნახაზის მიხედვით იპოვეთ:

- 1) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD}$
- 2) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MC}$



15.4. ABC სამკუთხედში $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ გამოსახეთ $\vec{a}$ და $\vec{c}$ ვექტორების საშუალებით $\overrightarrow{BM}$ ვექტორი, სადაც M არის AC გვერდის შუაწერტილი.

15.5. ABC სამკუთხედში $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$ გამოსახეთ $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორების საშუალებით $\overrightarrow{CM}$ ვექტორი, სადაც M არის AB გვერდის შუაწერტილი.

15.6. O არის ABC სამკუთხედის AE , BM და CN მედიანების გადაკვეთის წერტილი. გამოსახეთ:

- 1) $\overrightarrow{CB}$ ვექტორი $\overrightarrow{BM} = \vec{a}$ და $\overrightarrow{CN} = \vec{b}$ ვექტორების საშუალებით;
- 2) $\overrightarrow{CE}$ ვექტორი $\overrightarrow{AE} = \vec{a}$ და $\overrightarrow{CN} = \vec{b}$ ვექტორების საშუალებით.

15.7. O არის $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორების საშუალებით გამოსახეთ:

- 1) $\overrightarrow{OD}$ ვექტორი;
- 2) $\overrightarrow{OA}$ ვექტორი.

15.8. რა პირობებში სრულდება შემდეგი ტოლობები

- 1) $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OA}|$;
- 2) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$;

$$3) \left| \vec{a} - \vec{b} \right| = \left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right|;$$

$$4) \left| \vec{a} + \vec{b} \right| = \left| \vec{a} - \vec{b} \right|.$$

15.9. რა შემთხვევაში ეოფს $\vec{a} + \vec{b}$ ვექტორი შუაზე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხეს?

15.10. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის გეგმილი $\hat{l}$ ღერძზე, თუ $\left| \vec{a} \right| = 6$ და

იგი $\hat{l}$ ღერძთან ადგენს კუთხეს

- 1) 60° ; 2) 150° .

15.11. იპოვეთ გეგმა $(4\vec{a} - 3\vec{b})$, თუ $\left| \vec{a} \right| = 2$, $\left| \vec{b} \right| = \frac{3}{2}$, $\vec{a}, \hat{l} = 45^\circ$;

$\vec{b}, \hat{l} = 60^\circ$.

15.12. რამდენიმე ვექტორის ერთსა და იმავე ღერძზე გეგმილების ჯამი ნულის ტოლია, შეიძლება თუ არა დავასკვნათ, რომ ეს ვექტორები ადგენენ მხოლოდ შეკრულ ტეხილს?

15.13. მოცემულია $A(5; -2), B(3; 1), C(2; 5)$ და $D(-3; 2)$ წერტილები. იპოვეთ:

- 1) $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატები;
- 2) $\overline{BD}$ ვექტორის კოორდინატები;
- 3) $\overline{DC}$ ვექტორის კოორდინატები;
- 4) $\overline{AD}$ ვექტორის კოორდინატები;

15.14. მოცემულია $A(-2; 1; -1), B(2; 0; -9), C(2; -1; 0)$ და $D(2; 3; -2)$ წერტილები. იპოვეთ:

- 1) $\overline{AB}$ ვექტორის კოორდინატები;
- 2) $\overline{BC}$ ვექტორის კოორდინატები;
- 3) $\overline{DC}$ ვექტორის კოორდინატები;
- 4) $\overline{AD}$ ვექტორის კოორდინატები.

15.15. იპოვეთ B წერტილის კოორდინატები, თუ:

- 1) $\overline{AB}(-2; 0)$ და $A(2; 6)$;
- 2) $\overline{BA}(5; 2)$ და $A(4; 2)$;
- 3) $\overline{AB}(2; 0; -4)$ და $A(2; -1; 8)$;
- 4) $\overline{BA}(5; -5; 7)$ და $A(-2; 3; 3)$.

15.16. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები, თუ:

- 1) $A(-3; 1), B(6; -3), C(5; 2)$ და $\overline{AB} = \overline{CD}$;

2) $A(9;0;-3), B(-2;2;1), C(1;5;-2)$ და $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

15.17. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის A წვეროს კოორდინატები, თუ $B(-1;10)$ და $C(7;2)$, $D(1;-4)$.

15.18. იპოვეთ $ABCD$ პარალელოგრამის C წვეროს კოორდინატები, თუ $A(1;2), B(0;3)$ და $D(3;3)$.

15.19. მოცემულია $M(-2;1)$ და $N(2;4)$ წერტილები. E და F წერტილები შესაბამისად OX და OY ღერძებს ეკუთვნიან, ამასთან $\overline{MN} = \overline{EF}$. იპოვეთ:

1) E წერტილის კოორდინატები;

2) F წერტილის კოორდინატები.

15.20. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(2;-3)$ და $\vec{b}(-4;8)$. იპოვეთ:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{b} - \vec{a}$; 3) $3\vec{a} + \vec{b}$; 4) $\vec{a} + 2\vec{b}$;

5) $-\vec{a} - 2\vec{b}$; 6) $3\vec{a} - 5\vec{b}$.

15.21. მოცემულია ვექტორები $\vec{a}(-2;0;1), \vec{b}(0;4;-5)$. იპოვეთ:

1) $\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - \vec{b}$; 3) $3\vec{a} + 2\vec{b}$; 4) $4\vec{a} - 3\vec{b}$.

15.22. იპოვეთ მანძილი A და B წერტილებს შორის, თუ:

1) $A(-1;-2), B(4;3)$; 2) $A(3;-1), B(-6;2)$;

3) $A(-1;-2;4), B(6;2;1)$; 4) $A(5;-1;-2), B(2;5;2)$.

15.23. იპოვეთ $|\vec{a}|$, თუ:

1) $\vec{a}(-5;6)$; 2) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$;

3) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, A(-19;5), B(-5;2)$; 4) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, A(-5;-1;4), B(5;1;5)$.

15.24. იპოვეთ m , თუ:

1) $\vec{a} = 12\vec{i} + m\vec{j}$ და $|\vec{a}| = 13$;

2) $\vec{a} = (6;-4;m)$ და $|\vec{a}| = 14$;

3) $A(-2;3), B(2;m)$ და $|\overrightarrow{AB}| = 5$;

4) $A(-2;5;m), B(7;-9;-1)$ და $|\overrightarrow{AB}| = 18$.

15.25. დაადგინეთ კოლინეარულია, თუ არა $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები:

1) $\vec{a}(2;-3), \vec{b}(-6;9)$; 2) $\vec{a}(3;-1), \vec{b}(9;-2)$;

3) $\vec{a}\left(\frac{1}{2};4;\frac{1}{3}\right), \vec{b}\left(-1;-8;-\frac{2}{3}\right)$; 4) $\vec{a}\left(2;-\frac{1}{3};5\right), \vec{b}\left(4;\frac{2}{3};10\right)$.

15.26. λ -რა მნიშვნელობისთვისაა კოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, თუ

$$\vec{a}(2; -3; \lambda), \quad \vec{b}(6; -9; 15).$$

15.27. α და β -ს რა მნიშვნელობისთვისაა კოლინეარული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, თუ

$$\vec{a}(2; \alpha; -4), \quad \vec{b}(\beta; 4; 12).$$

15.28. აჩვენეთ, რომ: $A(1; -1; 3), B(2; 2; -5), C(4; 1; -6), D(3; -2; 2)$ პარალელოგრამის წვეროებია.

15.29. იპოვეთ $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, თუ

$$1) \vec{a}(3; 0), \vec{b}(-1; 2); \quad 2) \vec{a} = \vec{i} - \vec{k}, \vec{b} = 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

15.30. იპოვეთ $\vec{a}$ ვექტორის კოორდინატები, თუ:

1) ის $\vec{b} = -\vec{i} - 3\vec{j}$ ვექტორის თანამიმართულია და მისი სიგრძე 10-ის ტოლია;

2) ის $\vec{b}(-2; 1; -1)$ ვექტორის საწინააღმდეგოდაა მიმართული და მისი სიგრძე $3\sqrt{6}$ -ის ტოლია.

15.31. იპოვეთ $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ვექტორის კოლინეარული $\vec{b}$ ვექტორი, თუ ის Oz ღერძთან მახვილ კუთხეს ადგენს, $|\vec{b}| = 9$.

15.32. მოცემულია $A(6; -3)$ და $B(8; -5)$ წერტილები. იპოვეთ C წერტილის კოორდინატები, თუ $2\vec{AB} + \vec{AC} + 3\vec{BC} = \vec{0}$

15.33. მოცემულია $A(1; 0)$ და $B(-3; 2)$ წერტილები. იპოვეთ C წერტილის კოორდინატები, თუ $3\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a}$, სადაც $\vec{a}(5; -7)$.

15.34. მოცემულია $A(0; -1; 2)$ და $B(1; 0; -2)$ წერტილები. იპოვეთ C წერტილის კოორდინატები, თუ $\vec{AB} + 3\vec{AC} = 2\vec{BC}$.

15.35. მოცემულია $A(-1; -2; 0)$, $B(-3; 0; 1)$ და $C(0; 1; 2)$ წერტილები. იპოვეთ D წერტილის კოორდინატები, თუ $\vec{AB} - 2\vec{BC} + \vec{CD} = \vec{a}$, სადაც $\vec{a}(-6; 0; 2)$.

15.36. $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ:

$$1) |\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 2, \alpha = 30^\circ; \quad 2) |\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 6, \alpha = 120^\circ;$$

$$3) |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 8, \alpha = \pi; \quad 4) |\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 5, \alpha = 45^\circ.$$

15.37. იპოვეთ კუთხე $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის, თუ:

- 1) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2}$;
- 2) $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -2\sqrt{3}$.

15.38. მოცემულ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ:

- 1) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot \vec{a}$, თუ $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \alpha = \frac{\pi}{4}$;
- 2) $(\vec{a} + 2\vec{b})^2$, თუ $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \alpha = 150^\circ$;
- 3) $(3\vec{a} - \vec{b})^2$, თუ $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 3, \alpha = \frac{3\pi}{4}$;
- 4) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b})$, თუ $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

15.39. მოცემულია $|\vec{a}| = 7, |\vec{b}| = 24, \vec{a} \perp \vec{b}$. იპოვეთ $|\vec{a} + \vec{b}|$ და $|\vec{a} - \vec{b}|$.

15.40. მოცემულ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ:

- 1) $|\vec{a} + \vec{b}|$, თუ $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, \alpha = 120^\circ$;
- 2) $|\vec{a} - \vec{b}|$, თუ $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 2, \alpha = \frac{5\pi}{6}$;
- 3) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, თუ $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2\sqrt{3}, \alpha = \frac{5\pi}{6}$;
- 4) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, თუ $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{2}, \alpha = 135^\circ$.

15.41. $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ვექტორები აკმაყოფილებენ პირობას $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. იპოვეთ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$, თუ:

- 1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ და $\vec{c}$ ერთეულოვანი ვექტორებია;
- 2) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = 1$.

15.42. იპოვეთ $|\vec{a} - \vec{b}|$, თუ მოცემულია

$$|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 15, |\vec{a} + \vec{b}| = 20.$$

15.43. იპოვეთ $|\vec{a} + \vec{b}|$, თუ მოცემულია

$$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \sqrt{31}, |\vec{a} - \vec{b}| = 4.$$

15.44. მოცემულია $|\vec{a}|=7$, $|\vec{a}+\vec{b}|=12$, $|\vec{a}-\vec{b}|=14$. იპოვეთ $|\vec{b}|$.

15.45. α -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნებიან ურთიერთმართობული $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ და $\vec{a}$ ვექტორები, თუ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-4$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$?

15.46. α -ს რა მნიშვნელობისათვის იქნებიან ურთიერთმართობული $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ და $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ ვექტორები, თუ $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$?

15.47. გამოთვალეთ:

- 1) $\vec{i}\cdot(\vec{i}-3\vec{j})-\vec{j}\cdot(\vec{i}+\vec{k})+\vec{k}\cdot(\vec{j}-3\vec{k})$;
- 2) $\vec{i}\cdot(\vec{i}+3\vec{j})+3\vec{j}\cdot(\vec{j}-5\vec{k})-(\vec{i}-2\vec{j})^2$.

15.48. იპოვეთ $\vec{a}\cdot\vec{b}$, თუ:

- 1) $\vec{a}(-1;3)$, $\vec{b}(2;-5)$;
- 2) $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}$;
- 3) $\vec{a}(1;2;-6)$, $\vec{b}(2;-3;0)$;
- 4) $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$.

15.49. იპოვეთ $\vec{c}_1$ და $\vec{c}_2$ ვექტორების სკალარული ნამრავლი, თუ:

- 1) $\vec{c}_1=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}(2;-1)$, $\vec{b}(1;-2)$;
- 2) $\vec{c}_1=\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}$;
- 3) $\vec{c}_1=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}(1;0;-1)$, $\vec{b}(0;1;-2)$;
- 4) $\vec{c}_1=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}=\vec{i}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$.

15.50. სამკუთხედის წვეროებია $A(-1;-2)$, $B(4;-1)$, $C(1;2)$. იპოვეთ:

- 1) $\overrightarrow{CB}^2$;
- 2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

15.51. იპოვეთ $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს შორის კუთხის კოსინუსი, თუ:

- 1) $\vec{a}=2\vec{i}-6\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}$;
- 2) $\vec{a}(-1;2)$, $\vec{b}(4;-2)$;
- 3) $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$;
- 4) $\vec{a}(-1;0;1)$, $\vec{b}(0;1;-2)$.

15.52. m -ის რა მნიშვნელობისათვისაა მართობული $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორები, თუ:

- 1) $\vec{a}(-2;2m)$, $\vec{b}(-1;2)$;
- 2) $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{b}=m\vec{i}+2\vec{j}$;
- 3) $\vec{a}(1;m;-4)$, $\vec{b}(7;-3;m)$;
- 4) $\vec{a}=m\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=m\vec{i}+2m\vec{j}+\vec{k}$.

15.53. დაამტკიცეთ, რომ $A(2;4;-4)$, $B(1;1;-3)$, $C(-2;0;5)$, $D(-1;3;4)$ წერტილები პარალელოგრამის წვეროებს წარმოადგენს.

15.54. დაამტკიცეთ, რომ $ABCD$ ოთხკუთხედი რომბია, თუ: $A(6;7;8)$, $B(8;2;6)$, $C(4;3;2)$, $D(2;8;4)$.

15.55. დაამტკიცეთ, რომ სამი ვექტორი კომპლანარულია, თუ ორი მათგანი კოლინეარულია.

15.56. $\vec{a}$ ვექტორი საკოორდინატო ღერძებთან ქმნის შესაბამისად α , β , γ კუთხეებს: 1) დაამტკიცეთ, რომ $\vec{a}$ -ს თანამიმართული ერთეულადანი ვექტორის კოორდინატებია $(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$; 2) დაამტკიცეთ ტოლობა: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

15.57. დაამტკიცეთ თეორემა სამი პერპენდიკულარის შესახებ ვექტორთა სკალარული ნამრავლის გამოყენებით.

§16. ფიგურათა გარდაქმნა

16.1. ნამოთვლილთაგან რომელ ფიგურას აქვს და რომელს არა აქვს სიმეტრიის ცენტრი:

1) ტოლფერდა სამკუთხედს; 2) ტოლგვერდა სამკუთხედს;
3) წესიერ მრავალკუთხედს, რომელთა გვერდების რიცხვი ლუწია (კენტი);

4) წრეწირს; 5) პარალელოგრამს; 6) ტრაპეციას.

16.2. C წერტილი AB მონაკვეთის შუაწერტილია. იპოვეთ:

1) C წერტილის კოორდინატები, თუ $A(-3;-7)$, $B(-4;8)$;

2) A წერტილის კოორდინატები, თუ $C(3;1)$, $B(-5;2)$.

16.3. იპოვეთ M წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები ხათავის მიმართ, თუ:

1) $M(3;5)$; 2) $M(-3;7)$.

16.4. იპოვეთ M წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები Q წერტილის მიმართ, თუ:

1) $M(1;2)$, $Q(3;4)$; 2) $M(-4;6)$, $Q(3;5)$.

16.5. $ABCD$ პარალელოგრამში $AB=6$ სმ და $BC=12$ სმ. A კუთხის ბისექტრისა BC გვერდს კვეთს M წერტილში. N არის M წერტილის სიმეტრიული წერტილი პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის მიმართ. იპოვეთ MN .

16.6. M და N არის $ABCD$ პარალელოგრამის A და B წვეროების სიმეტრიული წერტილები A და B კუთხეების

ბისექტრისების გადაკვეთის წერტილის მიმართ. იპოვეთ $ABMN$ ოთკუთხედის პერიმეტრი, თუ $AB = 8$ სმ.

16.7. რამდენი სიმეტრიის ღერძი აქვს:

- 1) ტოლფეხურდა სამკუთხედს;
- 2) მართკუთხედს, რომელიც კვადრატს არ არის;
- 3) ტოლფეხურდა ტრაპეციას;
- 4) წესიურ ექვსკუთხედს;
- 5) კვადრატს;
- 6) პარალელოგრამს, რომელიც არ არის მართკუთხედი და არც რომბი.
- 7) სხვადასხვა გვერდა სამკუთხედს;
- 8) ტოლფეხურდა სამკუთხედს, რომელიც არ არის ტოლგვერ-

და.

16.8. როგორ სამკუთხედს აქვს მხოლოდ ორი სიმეტრიის ღერძი?

16.9. აქვს თუ არა სიმეტრიის ღერძი და თუ აქვს რამდენი?

- 1) წრფის; 2) მონაკვეთს.

16.10. იპოვეთ $M(-5;2)$ წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები:

- 1) აბსცისთა ღერძის მიმართ; 2) ორდინატთა ღერძის მიმართ;
- 3) $x = 2$ წრფის მიმართ; 4) $y = -1$ წრფის მიმართ;
- 5) I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისებზე გამავალი წრფის მიმართ.

16.11. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც სიმეტრიულია $y = 2x + 3$ წრფის:

- 1) Ox ღერძის მიმართ; 2) Oy ღერძის მიმართ;
- 3) I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისების შემცველი წრფის მიმართ.

16.12. $y = 2x + b$ და $y = kx - 7$ წრფეები სიმეტრიულია:

- 1) Ox ღერძის მიმართ; 2) Oy ღერძის მიმართ;
- 3) I და III საკოორდინატო კუთხეების ბისექტრისების შემცველი წრფის მიმართ. იპოვეთ b და k .

16.13. მოცემულია A, B და C წერტილები. იპოვეთ C წერტილის სიმეტრიული წერტილის კოორდინატები იმ ღერძის მიმართ, რომლის მიმართაც სიმეტრიულია A და B წერტილები, თუ:

- 1) $A(3; -4)$, $B(3; 4)$, $C(5; 2)$; 2) $A(2; 3)$, $B(-2; 3)$, $C(-2; -6)$;
- 3) $A(3; -2)$, $B(3; 4)$, $C(-4; 9)$; 4) $A(6; 4)$, $B(2; 4)$, $C(3; -2)$.

16.14. $ABCD$ ტრაპეციაში BD დიაგონალის სიგრძე 25 დმ-ია. იპოვეთ ტრაპეციის შეამონაკვეთი, თუ ტრაპეციას აქვს

სიმეტრიის ღერძი, რომლის ფუძეებს შორის მოქცეული მონაკვეთი 7 დმ-ია.

16.15. მოცემული მობრუნება ჩაწერეთ R_0^α ($-180^\circ < \alpha \leq 180^\circ$) სახით:

- 1) $R_0^{720^\circ}$; 2) $R_0^{1200^\circ}$; 3) $R_0^{-470^\circ}$; 4) $R_0^{1600^\circ}$;
 5) $R_0^{-550^\circ}$; 6) $R_0^{-1130^\circ}$; 7) $R_0^{-970^\circ}$; 8) $R_0^{1850^\circ}$.

16.16. საკოორდინატო სიბრტყის სათავეს გარშემო მობრუნებისას P წერტილი აისახება Q წერტილში, ხოლო M წერტილი N -ში. იპოვეთ N წერტილის კოორდინატები, თუ:

- 1) $P(2;0)$, $Q(0;2)$, $M(0;4)$; 2) $P(-3;0)$, $Q(0;3)$, $M(7;0)$;
 3) $P(3;6)$, $Q(-3;-6)$, $M(-2;5)$; 4) $P(4;-2)$, $Q(-4;2)$, $M(-3;-2)$.

16.17. საკოორდინატო სიბრტყის სათავეს გარშემო α კუთხით მობრუნებისას P წერტილი აისახება Q წერტილში. იპოვეთ PQ მონაკვეთის სიგრძე, თუ:

- 1) $P(7;24)$, $\alpha = 60^\circ$; 2) $P(3;-3)$, $\alpha = 90^\circ$;
 3) $P(5;-12)$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; 4) $P(3;-4)$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

16.18. O წერტილის გარშემო α კუთხით მობრუნებისას K წერტილი აისახება მისგან განსხვავებულ M წერტილში, ხოლო β კუთხით მობრუნებისას - N წერტილში. O ცენტრის გარშემო რა კუთხით მობრუნებისას აისახება M წერტილი N წერტილში, თუ:

- 1) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 130^\circ$; 2) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 50^\circ$;
 3) $\alpha = 100^\circ$, $\beta = -65^\circ$; 4) $\alpha = -125^\circ$, $\beta = -50^\circ$.

16.19. საკოორდინატო სიბრტყის სათავეს გარშემო მობრუნებისას M წერტილი აისახება N წერტილში. იპოვეთ N წერტილის y კოორდინატი, თუ:

- 1) $M(0;5)$, $N(-3;y)$ და მობრუნება ხდება ბლაგვი კუთხით;
 2) $M(3;0)$, $N(2;y)$ და მობრუნება ხდება საათის ისრის მოძრაობის მიმართულებით მახვილი კუთხით;
 3) $M(\sqrt{41};\sqrt{8})$, $N(-5;y)$ და N წერტილი მეორე მეოთხედშია;
 4) $M(-8;3)$, $N(4;y)$ და N წერტილი მეოთხე მეოთხედშია.

16.20. საკოორდინატო სიბრტყის სათავეს გარშემო α კუთხით მობრუნებისას M წერტილი აისახება N წერტილში. იპოვეთ N წერტილის კოორდინატები, თუ:

$$1) M(3;0), \alpha = 90^\circ;$$

$$2) M(0;3), \alpha = \frac{\pi}{6};$$

$$3) M(5;0), \alpha = 210^\circ;$$

$$4) M(4;0), \alpha = -\frac{\pi}{4};$$

$$5) M(0;4), \alpha = 150^\circ;$$

$$6) M(0;-5), \alpha = -210^\circ.$$

16.21. საკოორდინატო სიბრტყის სათავის გარშემო α კუთხით მობრუნებისას P წერტილი აისახება Q წერტილში. იპოვეთ Q წერტილის კოორდინატები, თუ:

$$1) P(2;-4), \alpha = -180^\circ;$$

$$2) P(4;4), \alpha = -90^\circ;$$

$$3) P(5;5), \alpha = -\frac{3\pi}{4}$$

$$4) P(7;7), \alpha = -165^\circ;$$

$$5) P(-3;3\sqrt{3}), \alpha = -\frac{\pi}{2};$$

$$6) P(2\sqrt{3};-2), \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

16.22. იპოვეთ N წერტილის პოპოტეტიური წერტილის კოორდინატები კოორდინატთა სათავის მიმართ, პოპოტეტიის კოეფიციენტით k , თუ:

$$1) N(-1;5), k = 1;$$

$$2) N(3;-2), k = -1;$$

$$3) N(-6;9), k = \frac{4}{3};$$

$$4) N(2;-3), k = -\frac{1}{3}.$$

16.23. იპოვეთ M წერტილის პოპოტეტიური წერტილის კოორდინატები Q წერტილის მიმართ, პოპოტეტიის კოეფიციენტით k , თუ:

$$1) M(-3;1), Q(-3;0), k = 2; \quad 2) M(-2;-3), Q(0;-3), k = -2;$$

$$3) M(-2;-1), Q(-2;4), k = 2; \quad 4) M(-1;-2), Q(1;-2), k = -4.$$

16.24. P წერტილი არის A წერტილის პოპოტეტიური კოორდინატთა სათავის მიმართ. იპოვეთ პოპოტეტიის კოეფიციენტი, თუ:

$$1) P(5;0), A(3;0);$$

$$2) P(0;2), A(0;-3);$$

$$3) P(9;3), A(6;2);$$

$$4) P(-6;9), A(2;-3).$$

16.25. O არის $ABCD$ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ პოპოტეტიის კოეფიციენტი, თუ:

$$1) C \text{ არის } A\text{-ს პოპოტეტიური } O \text{ ცენტრის მიმართ};$$

$$2) O \text{ არის } D\text{-ს პოპოტეტიური } B \text{ ცენტრის მიმართ}.$$

16.26. O არის ABC სამკუთხედის AN და BM მედიანების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ პოპოტეტიის კოეფიციენტი, თუ:

$$1) A \text{ არის } N\text{-ს პოპოტეტიური } O \text{ ცენტრის მიმართ};$$

$$2) M \text{ არის } O\text{-ს პოპოტეტიური } B \text{ ცენტრის მიმართ}.$$

1627. $ABCD$ ტრაპეციის ფუძეებია $AD=20$ და $BC=4$, ხოლო O არის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი, თუ:

- 1) A არის C -ს ჰომოთეტიური O ცენტრის მიმართ;
- 2) B არის D -ს ჰომოთეტიური O ცენტრის მიმართ;
- 3) D არის O -ს ჰომოთეტიური B ცენტრის მიმართ;
- 4) C არის O -ს ჰომოთეტიური A ცენტრის მიმართ;
- 5) O არის C -ს ჰომოთეტიური A ცენტრის მიმართ;

6) $\triangle BOC$ არის $\triangle AOD$ -ს ჰომოთეტიური O ცენტრის მიმართ.

1628. AM არის ABC სამკუთხედის ბისექტრისა. იპოვეთ $AB:AC$, თუ B არის M -ის ჰომოთეტიური C ცენტრის მიმართ, ჰომოთეტიის კოეფიციენტით 4.

1629. შეადგინეთ იმ წრფის განტოლება, რომელიც მოცემული წრფის ჰომოთეტიურია კოორდინატთა სათავის მიმართ, ჰომოთეტიის კოეფიციენტით k , თუ:

- 1) $y = 2x + 3$, $k = 3$;
- 2) $y = -2x + 1$, $k = -\frac{3}{2}$;
- 3) $2y + 3x = 5$, $k = 2$;
- 4) $5y - 4x + 6 = 0$, $k = -5$.

1630. იპოვეთ იმ ჰომოთეტიის კოეფიციენტი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, რომლითაც:

- 1) $y = 5x - 2$ წრფე აისახება $y = 5x + 3$ წრფეში;
- 2) $3y + 2x = -3$ წრფეს აისახება $y = -\frac{2}{3}x + 4$ წრფეში;
- 3) $5y + 3x + 6 = 0$ წრფე აისახება $\frac{5}{2}y + \frac{3}{2}x - 4 = 0$ წრფეში;
- 4) $y = 7$ წრფე აისახება $y = 3$ წრფეში;
- 5) $x = 2$ წრფე აისახება $x = -6$ წრფეში.

1631. $A(2; -3)$ და $C(4; -9)$ არის $ABCD$ პარალელოგრამის მოპირდაპირე წვეროები. იპოვეთ პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილის ჰომოთეტიური წერტილი კოორდინატთა სათავის მიმართ, ჰომოთეტიის კოეფიციენტით $k=2$.

1632. პარალელური გადატანა განისაზღვრება $\vec{a}$ ვექტორით. იპოვეთ M წერტილის სახე ამ პარალელური გადატანისას, თუ:

- 1) $\vec{a}(5; -2)$, $M(6; -3)$;
- 2) $\vec{a}(-3; 4)$, $M(4; 2)$.

1633. პარალელური გადატანისას M წერტილი აისახება N წერტილში. იპოვეთ იმ ვექტორის კოორდინატები, რომელიც ამ პარალელური გადატანას განსაზღვრავს, თუ:

- 1) $M(-2; 1)$, $N(4; 6)$;
- 2) $M(3; 5)$, $N(2; -4)$.

16.34. პარალელური გადატანისას L წერტილი აისახება K წერტილში. იპოვეთ M წერტილის სახე იმავე პარალელური გადატანისას, თუ:

1) $L(-3;2), K(7;-2), M(-2;4);$

2) $L(4;-5), K(-6;-3), M(2;3).$

16.35. იპოვეთ იმ წრფის განტოლება, რომელშიც აისახება მოცემული წრფე $\vec{a}$ ვექტორით განსაზღვრული პარალელური გადატანისას, თუ:

1) $y = 5x - 2, \vec{a}(0;4);$ 2) $y = -2x + \frac{1}{2}, \vec{a}(0;-3);$

3) $y = 4 - 3x, \vec{a}(-3;0);$ 4) $y = \frac{1}{2}x - 2, \vec{a}(4;0);$

5) $y = \frac{3}{5}x + 3, \vec{a}(-5;2);$ 6) $y = -5x - 1, \vec{a}(3;-2).$

16.36. პარალელური გადატანისას A წერტილი აისახება B წერტილში. რომელ წრფეში აისახება მოცემული წრფე იმავე პარალელური გადატანისას, თუ:

1) $A(1;4), B(2;5), y = -3x + 4;$

2) $A(-3;0), B(4;-3), y = 5x - 3.$

16.37. იპოვეთ იმ პარაბოლის განტოლება, რომელშიც აისახება მოცემული პარაბოლა $\vec{a}$ ვექტორით განსაზღვრული პარალელური გადატანისას, თუ:

1) $y = 2x^2, \vec{a}(0;3);$ 2) $y = -3x^2 + 8, \vec{a}(0;-5);$

3) $y = -5x^2, \vec{a}(2;0);$ 4) $y = 2 + x^2, \vec{a}(-3;0);$

5) $y = \frac{1}{2}x^2, \vec{a}(-3;2);$ 6) $y = -x^2 - x + 2, \vec{a}(-2;3).$

16.38. პარალელური გადატანისას M წერტილი აისახება N წერტილში. რომელ პარაბოლაში აისახება მოცემული პარაბოლა იმავე პარალელური გადატანისას, თუ:

1) $M(0;-3), N(2;3), y = -2x^2 - 4x + 3;$

2) $M(-2;4), N(0;3), y = 3x^2 - 2x + 1.$

§17. კუბი. პარალელუმიპედი. პრიზმა

ამოცანები გამოთვლაზე

17.1. იპოვეთ კუბის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი წიბო 3 სმ-ის ტოლია.

17.2. იპოვეთ კუბის წიბო, თუ მისი ზედაპირის ფართობი 24 მ²-ის ტოლია.

17.3. იპოვეთ კუბის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი დიაგონალი 7 სმ-ის ტოლია.

17.4. იპოვეთ კუბის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი დიაგონალური კვეთის ფართობი $5\sqrt{2}$ სმ²-ის ტოლია.

17.5. კუბის წიბოს სიგრძეა $5\sqrt[3]{3}$ სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ერთი წვეროდან გამოსული სამივე წიბოს ბოლოზე.

17.6. კუბის წიბო a -ს ტოლია. იპოვეთ ფუძის გვერდზე გამავალი სიბრტყით კუბის კვეთის ფართობი, თუ კუთხე ამ სიბრტყესა და ფუძეს შორის არის: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

17.7. იპოვეთ კუთხე კუბის გვერდითი წახნაგის დიაგონალსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

17.8. იპოვეთ კუთხე კუბის ორი წახნაგის დიაგონალებს შორის, რომლებიც საერთო წვეროდან გამოდიან.

17.9. კუბის წიბოს სიგრძეა 5. იპოვეთ მანძილი ერთ წახნაგზე არამდებარე ორი პარალელური წიბოს შუაწერტილებს შორის.

17.10. კუბის წიბოს სიგრძე $2\sqrt{5}$. იპოვეთ მანძილი ზედა ფუძის ცენტრიდან ქვედა ფუძის რომელიმე გვერდის შუაწერტილამდე.

17.11. კუბის წიბოს სიგრძეა 4. იპოვეთ მანძილი მოპირდაპირე წახნაგების არაპარალელური გვერდების შუაწერტილებს შორის.

17.12. კუბის წიბოს სიგრძეა 8. იპოვეთ მანძილი ზედა ფუძის რომელიმე გვერდის შუაწერტილიდან ქვედა ფუძის სხვა წახნაგზე მდებარე წვერომდე.

17.13. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ კუბში E და F წერტილები შესაბამისად კუბის AB და $A_1 B_1$ წიბოების შუაწერტილებია. იპოვეთ $DD_1 FE$ მართკუთხედის ფართობი, თუ კუბის წიბოს სიგრძე 10 სმ-ის ტოლია.

17.14. კუბის წიბო a -ს ტოლია. იპოვეთ მანძილი კუბის წვეროდან მის დიაგონალამდე.

17.15. კუბის წიბო a -ს ტოლია. იპოვეთ ქვედა ფუძის დიაგონალზე და ზედა ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილებზე გამავალი კვეთის პერიმეტრი და ფართობი.

17.16. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი მისი სამი განზომილების მიხედვით: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

17.17. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 4 სმ და 3 სმ, პარალელეპიპედის სიმაღლე კი 5 სმ-ია. იპოვეთ მისი დიაგონალი და კუთხე, რომელსაც ეს დიაგონალი ქმნის ფუძის სიბრტყესთან.

17.18. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 45° -იან კუთხეს. ფუძის გვერდებია 12 სმ და 16 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის სიმაღლე.

17.19. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60° -იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის სიმაღლე, თუ ფუძის გვერდებია 6 სმ და $2\sqrt{3}$ სმ.

17.20. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი მისი სამი განზომილების მიხედვით: 10 სმ, 22 სმ, 16 სმ.

17.21. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:7:8, ზედაპირის ფართობი კი უდრის 808 სმ²-ს. იპოვეთ წიბოები.

17.22. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 7 დმ და 24 დმ, ხოლო პარალელეპიპედის სიმაღლეა 8 დმ. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.23. იპოვეთ მართკუთხა პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა 2 მ, ფუძის ფართობი 3 მ² და დიაგონალური კვეთის ფართობი 5 მ².

17.24. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძეა $ABCD$; $AB=24$ სმ, $AD=36$ სმ და გვერდითი წიბო უდრის 7 სმ-ს. იპოვეთ AB_1C_1D კვეთის ფართობი.

17.25. მართკუთხა პარალელეპიპედის წიბოებია 3 სმ, 4 სმ და 7 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ერთი წვეროდან გამოსული სამივე წიბოს ბოლოზე.

17.26. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 7:24, დიაგონალური კვეთის ფართობი კი უდრის 50 დმ²-ს. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.27. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი 7 სმ-ია, ხოლო გვერდითი წახნაგების დიაგონალებია $2\sqrt{6}$ სმ და $\sqrt{33}$ სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.28. მართკუთხა პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამოსული სამი წიბოს ბოლოებზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α სიდიდის კუთხეს. ფუძის გვერდების სიგრძეებია a და b . იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი, თუ $\cos \alpha = \frac{1}{7}$, $a=5$, $b=2$.

17.29. მართკუთხა პარალელეპიპედის d დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α სიდიდის კუთხეს, ხოლო გვერდით წახნაგთან β სიდიდის კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის

გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $d = 2\sqrt{3}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$,
 $\sin \beta = \frac{3}{4}$.

17.30. მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოა 5 მ, ფუძის გვერდებია 6 მ და 8 მ, ხოლო ფუძის ერთ-ერთი დიაგონალი 12 მ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები.

17.31. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 სმ და 5 სმ, ხოლო ფუძის ერთ-ერთი დიაგონალია 4 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი, თუ ვიცით, რომ მისი მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60° -იან კუთხეს.

17.32. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 10 სმ და 17 სმ, ხოლო ფუძის ერთი დიაგონალი 21 სმ-ია. პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი 29 სმ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.33. იპოვეთ მართი პარალელეპიპედის დიაგონალები, თუ მისი თითოეული წიბო a -ს ტოლია, ხოლო ფუძის ერთ-ერთი კუთხე 60° -ია.

17.34. მართი პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამოსული წიბოები უდრის 1 მ-ს, 2 მ-ს და 3 მ-ს, ამასთან ორი უმცირესი ურთიერთშორის ქმნის 60° -იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის დიაგონალები.

17.35. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 6 მ და 8 მ; მათ შორის კუთხე 30° -ია, გვერდითი წიბო 5 მ-ია. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.36. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 სმ და 8 სმ; მათ შორის კუთხე 60° -ია. პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდრის 220 სმ²-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი და მცირე დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.37. მართი პარალელეპიპედის გვერდითი წიბო 10 დმ-ია, ფუძის გვერდებია 23 დმ და 11 დმ, ხოლო ფუძის დიაგონალები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3. იპოვეთ დიაგონალური კვეთების ფართობი.

17.38. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 2 სმ და 6 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 60° . იპოვეთ პარალელეპიპედის სიბრტყით კვეთის ფართობი, თუ ცნობილია, რომ ეს სიბრტყე კვეთს პარალელეპიპედის ყველა გვერდით წიბოს და ფუძის სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს ადგენს.

17.39. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია, რომლის დიაგონალებია 6 სმ და 8 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი, თუ გვერდითი წახნაგის დიაგონალია 13 სმ.

17.40. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია, დიაგონალური კვეთების ფართობებია 28 მ² და 21 მ², ხოლო პარალელეპიპედის სიმაღლეა 7 მ. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.41. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი a გვერდითა და α ბლაგვი კუთხით. პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალი მისი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს β კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $a=12$, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{ctg} \beta = 8$.

17.42. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი. რომბის მცირე დიაგონალია d , ხოლო მახვილი კუთხე α . პარალელეპიპედის სიმაღლე ტოლია $\frac{1}{2}d$ -სი. იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $d = \sqrt{7}$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

17.43. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია, მისი დიაგონალური კვეთის ფართობებია 20 მ² და 15 მ². იპოვეთ პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.44. პარალელეპიპედის სამი წახნაგის ფართობებია: 1 მ², 2 მ² და 3 მ². იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.45. პარალელეპიპედის წახნაგები ტოლი რომბებია $\sqrt[3]{3}$ -ის ტოლი გვერდითა და 60°-იანი მახვილი კუთხით. იპოვეთ პარალელეპიპედის ზედაპირის ფართობი.

17.46. პარალელეპიპედის გვერდითი წიბოა 7 სმ, ხოლო ფუძე არის კვადრატი, რომლის გვერდია 9 სმ. გვერდითი წიბო ფუძის მიმდებარე გვერდებთან ქმნის 60°-იან კუთხეებს. იპოვეთ მცირე დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.47. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის ფართობია 9, ხოლო სიმაღლეა 5.

17.48. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობი უდრის 144-ს, სიმაღლე კი ტოლია 14-ს. იპოვეთ პრიზმის დიაგონალი.

17.49. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის სიმაღლე, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია 8, ხოლო ფუძის ფართობი 4.

17.50. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის სიმაღლე, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია 16, ხოლო ფუძის დიაგონალი 4.

17.51. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 32, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობი 40. იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე.

17.52. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობი, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია 60, ხოლო სიმაღლე 3.

17.53. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა 1, ფუძის დიაგონალი კი 2.

17.54. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგის ფართობია $23\sqrt{2}$. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.55. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $28\sqrt{2}$. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

17.56. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის დიაგონალია 12 სმ, ხოლო გვერდითი წახნაგის დიაგონალი $\sqrt{97}$ სმ. იპოვეთ პრიზმის დიაგონალი.

17.57. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი დახრილია ფუძის სიბრტეისადმი α კუთხით, ხოლო ფუძის გვერდი უდრის a -ს. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ

$$a = \frac{\sqrt{51}}{4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

17.58. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალის სიგრძე უდრის d -ს და დახრილია გვერდითი წახნაგისადმი α კუთხით. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $d = 3\sqrt{3}$,

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}.$$

17.59. იპოვეთ კუთხე წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალსა და ფუძის სიბრტეეს შორის, თუ ფუძის გვერდი უდრის $\sqrt[4]{8}$ სმ-ს, ხოლო დიაგონალური კვეთის ფართობი $4\sqrt{6}$ სმ²-ის ტოლია.

17.60. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილებზე გავლებულია სიბრტეე, რომელიც ფუძის სიბრტეესთან ქმნის 60° -იან კუთხეს და გადაკვეთს სამ წიბოს. იპოვეთ ფუძის ფართობი, თუ კვეთის ფართობი 14 სმ²-ის ტოლია.

17.61. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილებზე გამავალი სიბრტეე კვეთს სამ გვერდით წიბოს და დახრილია ფუძის სიბრტეისადმი α კუთხით,

ფუძის გვერდის სიგრძეა a . იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი, თუ $a = \sqrt{5}$ სმ, $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

17.62. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის გვერდია a , ხოლო სიმაღლეა h .

17.63. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა 5, ხოლო ფუძის ფართობია $\sqrt{3}$.

17.64. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლეა $\sqrt{3}$, ხოლო ფუძის გვერდია 2.

17.65. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის სიმაღლე, თუ მისი ფუძის ფართობია $4\sqrt{3}$, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობია 36.

17.66. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობი, თუ პრიზმის სიმაღლეა 1, ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობია 18.

17.67. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის სიმაღლე, თუ მისი ფუძის გვერდია 6, ხოლო სრული ზედაპირის ფართობია $54\sqrt{3}$.

17.68. წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოზე გაველებულია მოპირდაპირე წახნაგისადმი პერპენდიკულარული მკვეთი სიბრტყე, რომლის ფართობი უდრის $12\sqrt{3}$ -ს. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.69. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ერთ გვერდზე გაველებულია მკვეთი სიბრტყე, რომელიც კვეთს მოპირდაპირე გვერდით წიბოს და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. ფუძის გვერდი ტოლია 3 სმ-ის. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

17.70. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდია $3\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ პრიზმის იმ სიბრტყით კვეთის ფართობი, რომელიც ფუძის ორი გვერდის შუაწერტილზე გადის და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 30° -იან კუთხეს, ამასთან ცნობილია, რომ კვეთის სიბრტყე პრიზმის მხოლოდ ერთ გვერდით წიბოს გადაკვეთს.

17.71. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილებზე გაშვებული სიბრტყე კვეთს ერთ გვერდით წიბოს და დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით.

კვეთის ფართობია S . იპოვეთ პრიზმის ფუძის ფართობი, თუ $S=18$, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

17.72. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე $\sqrt{3}$ სმ-ის ტოლია, ხოლო წრფე, რომელიც აერთებს ზედა ფუძის ცენტრს ქვედა ფუძის გვერდის შუაწერტილთან, ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს.

17.73. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგის ფართობი, თუ პრიზმის სიმაღლე 3-ის ტოლია, ხოლო წრფე, რომელიც ზედა ფუძის ცენტრს ქვედა ფუძის წვეროსთან აერთებს, ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ადგენს.

17.74. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდით წიბოსა და ღერძზე გამავალი კვეთის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია a , ხოლო გვერდითი წიბოა b .

17.75. წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი უდრის 4 სმ-ს, ხოლო გვერდითი წიბო 2 სმ-ს. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ქვედა ფუძის გვერდზე და ზედა ფუძის წვეროსზე.

17.76. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის გვერდია a , ხოლო სიმაღლე h .

17.77. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის თითოეული წიბო $7\sqrt{5}$ სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის დიდი დიაგონალი.

17.78. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის თითოეული წიბო 7 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მცირე დიაგონალი.

17.79. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის თითოეული წიბო a -ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის დიაგონალები და დიაგონალური კვეთების ფართობები.

17.80. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობია 1 მ^2 . იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.81. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 72 სმ^2 . გვერდითი წახნაგის დიაგონალია 5 სმ. იპოვეთ პრიზმის ფუძის გვერდი, თუ ის პრიზმის სიმაღლეზე ნაკლებია.

17.82. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 288 სმ^2 . გვერდითი წახნაგის დიაგონალია 10 სმ. იპოვეთ პრიზმის სიმაღლე, თუ ის ფუძის გვერდზე მეტია.

17.83. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის თითოეული წიბო a -ს ტოლია. ქვედა ფუძის ერთ გვერდსა და ზედა ფუძის მოპირდა-

პირე გვერდზე გავლებულია სიბრტყე. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

17.84. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის სიმაღლის სიგრძეა 13 სმ. პრიზმის ზედა და ქვედა ფუძეების ორი მოპირდაპირე (არა ერთ წახნაგზე მდებარე) გვერდებზე გავლებული კვეთა ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ ამ კვეთის ფართობი,

$$\text{თუ } \cos \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

17.85. მართი სამკუთხა პრიზმის ეველა წიბო ტოლია. გვერდითი ზედაპირის ფართობი 12 მ²-ია. იპოვეთ სიმაღლე.

17.86. იპოვეთ მართი სამკუთხა პრიზმის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე 50 სმ-ია და ფუძის გვერდებია 40 სმ, 13 სმ და 37 სმ.

17.87. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდებია 10 სმ, 17 სმ და 21 სმ; პრიზმის სიმაღლე კი 11 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი წიბოსა და ფუძის მცირე სიმაღლეზე გავლებული კვეთის ფართობი.

17.88. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 17:10:9. გვერდითი წიბო კი 16 სმ-ია; პრიზმის ზედაპირის ფართობია 1440 სმ². იპოვეთ ფუძის გვერდები.

17.89. მართი სამკუთხა პრიზმის ფუძის ერთ გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც კვეთს მოპირდაპირე გვერდით წიბოს და ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45°-იან კუთხეს. ფუძის ფართობი არის Q . იპოვეთ კვეთის ფართობი.

17.90. მართი პრიზმის ფუძე ABC ტოლფერდა სამკუთხედია $AB=BC=14$ სმ, $AC=4$ სმ. AC გვერდზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც კვეთს მოპირდაპირე წიბოს და ფუძის სიბრტყესთან 30°-იან ორწახნაგა კუთხეს ქმნის. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

17.91. მართი პრიზმის გვერდითი წიბო 16 სმ-ის ტოლია. მისი ფუძე მართკუთხა სამკუთხედია, რომლის კათეტებია 7 სმ და 8 სმ. იპოვეთ იმ სიბრტყით კვეთის ფართობი, რომელიც გადის 8 სმ-ის ტოლ კათეტზე და ფუძის სიბრტყესთან 60°-იან კუთხეს ქმნის.

17.92. მართი პრიზმის ფუძე $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის გვერდებია: $AB=CD=13$ სმ, $BC=11$ სმ და $AD=21$ სმ. მისი დიაგონალური კვეთის ფართობი უდრის 180 სმ²-ს. იპოვეთ პრიზმის ზედაპირის ფართობი.

17.93. მართ პრიზმას ფუძეში აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია. ტრაპეციის ფერდი მცირე ფუძის ტოლია, მისი მახვილი α

კუთხის კოსინუსი კი უდრის $\frac{5}{13}$ -ს. ტრაპეციის დიაგონალი 6 სმ-ს უდრის, პრიზმის დიაგონალი კი 10 სმ-ს. იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

17.94. მართ პრიზმას ფუძეში აქვს $ABCD$ ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის დიაგონალი $AC = \sqrt{7}$ სმ. C წვეროდან AD დიდ ფუძეზე დაშვებულია CE სიმაღლე, ხოლო $AD=3$ სმ და $AE=CD$. პრიზმის ქვედა ფუძის AD გვერდზე და ზედა ფუძის მის მოპირდაპირე B_1C_1 წიბოზე გაგლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია 30° -იანი კუთხით. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

17.95. მართ პრიზმას ფუძეში აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფართობი უდრის 20 სმ²-ს, ხოლო ფუძეები კი 5 სმ და 3 სმ-ია. პრიზმის სიმაღლის სიგრძეა 7 სმ. ქვედა ფუძის დიდ ფუძეზე და ზედა ფუძის მცირე ფუძეზე გაგლებულია პრიზმის მკვეთი სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

17.96. მართი პრიზმის ფუძეა წრეწირზე შემოხაზული ტრაპეცია, რომლის შუამონაკვეთია 20 , ხოლო პრიზმის სიმაღლეა 30 . იპოვეთ პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

ამოცანები დამტკიცებაზე

17.97. დაამტკიცეთ, რომ, თუ პარალელპიპედის ყველა დიაგონალი ტოლია, მაშინ იგი მართკუთხაა.

17.98. დაამტკიცეთ, რომ ყოველი პარალელპიპედის დიაგონალების კვადრატების ჯამი უდრის ყველა წიბოს კვადრატების ჯამს.

17.99. დაამტკიცეთ, რომ თუ მართკუთხა პარალელპიპედის დიაგონალი ერთი წვეროდან გამოსულ ორ წიბოსთან ქმნის 60° -იან კუთხეებს, მაშინ ის ამავე წვეროდან გამოსულ მესამე წიბოსთან შექმნის 45° -იან კუთხეს.

17.100. დაამტკიცეთ, რომ კუბის ერთიდაიმავე წვეროდან გამოსული სამი წიბოს ბოლოებზე გამავალი სიბრტყე ამავე წვეროდან გამოსული დიაგონალის პერპენდიკულარულია.

17.101. პარალელპიპედის ფუძე რომბია. ერთ-ერთი დიაგონალური კვეთაა მართკუთხედი. დაამტკიცეთ, რომ მეორე დიაგონალური კვეთა ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

17.102. მართი პარალელპიპედის ფუძეა რომბი; პარალელპიპედის დიაგონალური კვეთების ფართობებია Q_1 და Q_2 . დაამტკი-

ცემთ, რომ გვერდითი ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით $2\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}$.

17.103. დაამტკიცეთ, რომ, თუ პრიზმის დიაგონალური კვეთები იკვეთება, მაშინ მათი საერთო მონაკვეთი გვერდითი წიბოს პარალელურია.

17.104. დაამტკიცეთ, რომ, თუ $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის $B_1 D$ და $D_1 B$ დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ $A_1 C$ და $B_1 D$ დიაგონალები ქმნიან 60° -იან კუთხეს.

17.105. სამკუთხა პრიზმის ორი გვერდითი წახნაგი ურთიერთპერპენდიკულარულია. დაამტკიცეთ, რომ ამ წახნაგების ფართობთა კვადრატების ჯამი პრიზმის მესამე გვერდითი წახნაგის ფართობის კვადრატის ტოლია.

§18. პირამიდა

ამოცანები გამოთვლაზე

18.1. რამდენი წახნაგი აქვს პირამიდას, თუ მისი წიბოების რაოდენობაა 6.

18.2. რამდენი წიბო აქვს პირამიდას, თუ მისი წახნაგების რაოდენობაა 5.

18.3. რამდენი წვერო აქვს პირამიდას, თუ მისი წიბოების რაოდენობა 6-ით მეტია გვერდითი წახნაგების რაოდენობაზე.

18.4. რამდენი წვერო აქვს პირამიდას, თუ მისი წიბოების რაოდენობა 3-ით მეტია წახნაგების რაოდენობაზე.

18.5. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე.

18.6. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის აპოთემა.

18.7. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი.

18.8. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა 8 სმ, ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძეა $16\sqrt{2}$ სმ. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.9. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა 7 სმ, ხოლო ფუძის გვერდი 8 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

18.10. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა $2\sqrt{15}$ სმ. პირამიდის აპოთემა დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი 60° -იანი კუთხით. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

18.11. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი $14,76$ მ²-ია, ხოლო სრული ზედაპირი — 18 მ². იპოვეთ ფუძის გვერდი და პირამიდის სიმაღლე.

18.12. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი, თუ მისი პირამიდის სიმაღლეა 3 , ხოლო გვერდითი ზედაპირის ფართობია 80 .

18.13. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $42\sqrt{2}$ სმ², ხოლო ფუძეზე შემოხაზული წრის ფართობი $\frac{49}{2}\pi$ სმ². იპოვეთ გვერდითი წიბო.

18.14. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი, თუ მისი გვერდითი წიბო 5 სმ-ია, ხოლო სრული ზედაპირია 16 სმ².

18.15. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 14 სმ-ია, გვერდითი წიბო კი — 10 სმ. იპოვეთ დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.16. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი a -ს ტოლია, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ϕ კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის დიაგონალური კვეთის ფართობი, თუ $a=4$, $\operatorname{tg}\phi=3$.

18.17. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 8 სმ, ხოლო დიაგონალური კვეთის ფართობი $2\sqrt{34}$ სმ². იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.18. ფუძის a გვერდის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ მისი დიაგონალური კვეთა ფუძის ტოლდიდია.

18.19. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 7 სმ, ხოლო იმ კვეთის ფართობი, რომელიც პირამიდის სიმაღლეზე და აპოთემაზე გადის, რიცხობრივად ფუძის დიაგონალის სიგრძის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.20. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი 4 სმ-ის ტოლია. ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე კი 60° . იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.21. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა a , ხოლო გვერდით წიბოზე და ფუძის სიბრტყეს შორის

ორწახნაგა კუთხის სიდიდე α -ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $a=6$, $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

18.22. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა 4 სმ, ფუძის გვერდთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხეა β . იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $\cos \beta = 0,6$.

18.23. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a -ს, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ $a = \sqrt{21}$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

18.24. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე, თუ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.25. კუბში, რომლის წიბოს სიგრძეა $3\sqrt[3]{20}$, ზედა წახნაგის ცენტრი შეერთებულია ფუძის წვეროებთან. იპოვეთ მიღებული პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.26. კუბის ზედა ფუძის ცენტრი შეერთებულია ქვედა ფუძის გვერდების შუაწერტილებთან. იპოვეთ მიღებული პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ კუბის წიბო უდრის a -ს.

18.27. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a -ს, ხოლო პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე – α -ს. იპოვეთ მანძილი პირამიდის ფუძის ცენტრიდან მის გვერდით წიბომდე, თუ $a=20$, $\cos \alpha = \frac{1}{8}$.

18.28. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე.

18.29. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის აბოთემა.

18.30. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი.

18.31. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე უდრის პირამიდის ფუძის გვერდს. იპოვეთ კუთხე გვერდით წიბოზე და ფუძის სიბრტყეს შორის.

18.32. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის 11 სმ-ს და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 30° -იან კუთხეს. იპოვეთ ფუძის გვერდი.

18.33. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია $\sqrt[3]{15}$ სმ და გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან შეადგენს 45° -იან კუთხეს.

18.34. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $36\sqrt{7}$ სმ². ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძეა $8\sqrt{3}\pi$ სმ. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.35. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოა 8 სმ. ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძეა $8\sqrt{3}\pi$ სმ. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი და სიმაღლე.

18.36. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 12 სმ. გვერდითი წიბოს სიგრძე კი $\sqrt{195}$ სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც პირამიდის გვერდით წიბოსა და სიმაღლეზე გადის.

18.37. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოს სიგრძე უდრის h -ს, ხოლო სიმაღლე h -ს. იპოვეთ პირამიდის ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე, თუ $l = \sqrt{7}$, $h = \sqrt{3}$.

18.38. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ პირამიდის ფუძის გვერდი არის a , ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე -60° .

18.39. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი სიმაღლე უდრის 4 სმ-ს და აპოთემა 8 სმ-ია.

18.40. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობია $36\sqrt{7}$ სმ², ხოლო აპოთემაა $2\sqrt{7}$ სმ. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე და მის ფუძეზე შემოხაზული წრეწირის სიგრძე.

18.41. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძეში ნახაზული წრის ფართობი არის 12π სმ², ხოლო გვერდითი წიბოა 8 სმ. იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი.

18.42. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე უდრის H -ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე α -ს. იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ $H = \sqrt[3]{3}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

18.43. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე, თუ ფუძის გვერდის სიგრძეა 13 სმ და გვერდითი ზედაპირის ფართობი ორჯერ მეტია ფუძის ფართობზე.

18.44. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი და აპოთემა, თუ მისი გვერდითი წიბოა 10 სმ, ხოლო გვერდითი ზედაპირია 144 სმ².

18.45. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა 10, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეა φ . იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის გვერდით წიბოზე ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულად, თუ $\operatorname{tg} \varphi = 4$.

18.46. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის ცენტრიდან მის გვერდით წახნაგამდე მანძილი 5 სმ-ია, პირამიდის ფუძის გვერდი კი უდრის $30\sqrt{3}$ სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.47. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხეა 90° , ხოლო ფუძის ფართობი – S .

18.48. ფუძის მოცემული a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლე.

18.49. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის აპოთემა.

18.50. ფუძის a გვერდისა და h სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი.

18.51. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი წიბოა a , ხოლო ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r .

18.52. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი აპოთემაა L , ხოლო ფუძეში ჩახაზული წრეწირის რადიუსია r .

18.53. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ პირამიდის სიმაღლე უდრის h -ს, ხოლო გვერდითი წიბო l -ს.

18.54. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $5\sqrt{6}$ სმ, ხოლო ფუძის გვერდთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხეა α . იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

18.55. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის აპოთემის სიგრძე უდრის m -ს, ხოლო ორწახნაგა კუთხე ფუძესთან α -ს ტოლია.

იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ $m = 3\sqrt[4]{3}$, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

18.56. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $\sqrt{33}$ სმ, ხოლო გვერდითი წახნაგი უდიდესი დიაგონალური კვეთის ტოლდია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.57. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლეა h , ხოლო ფუძის გვერდი კი $- a$. იპოვეთ უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.58. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის სიმაღლეა $\sqrt{39}$ სმ, ხოლო ფუძის გვერდი კი $- 12$ სმ. იპოვეთ მცირე დიაგონალური კვეთის ფართობი.

18.59. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ ფუძის ფართობია Q , ხოლო ფუძესთან მდებარე თითოეული ორწახნაგა კუთხე α -ს ტოლია.

18.60. წესიერი პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი უდრის S -ს, ხოლო კუთხე გვერდით წახნაგსა და ფუძეს შორის α -ს.

იპოვეთ ფუძის ფართობი, თუ $S=38$, $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

18.61. პირამიდის ფუძის ფართობია 15, ხოლო ზედაპირის ფართობი კი $- 45$. იპოვეთ ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეები, თუ ისინი ერთმანეთის ტოლია.

18.62. პირამიდის ფუძე მართკუთხედი, რომლის გვერდები 6 სმ-ისა და 8 სმ-ის ტოლია. პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო 13 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.63. პირამიდას ფუძეში აქვს რომბი, რომლის დიაგონალებია 6 მ და 8 მ. პირამიდის სიმაღლე გადის რომბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და 1 მ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი.

18.64. პირამიდის ფუძე არის პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 3 სმ და 7 სმ, ხოლო ერთ-ერთი დიაგონალი 6 სმ-ია. პირამიდის სიმაღლე დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე გადის და 4 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი წიბოები.

18.65. პირამიდის ფუძე არის პარალელოგრამი, რომლის გვერდებია 20 სმ და 36 სმ, ფართობი კი 360 სმ²-ია; პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და უდრის 12 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

18.66. პირამიდის ფუძე არის მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ჰიპოტენუზა α -ს ტოლია. თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ქმნის β კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.67. პირამიდის ფუძე არის მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. ყოველი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყესთან 60° -იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.68. პირამიდის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია 7 და 2,3. პირამიდის ყველა წახნაგი დახრილია

ფუძის სიბრტცისადმი α კუთხით. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $\cos \alpha = 0,25$.

18.69. სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდებია 13 სმ, 14 სმ და 15 სმ. ფუძესთან მდებარე ყველა ორწახნაგა კუთხე ტოლია 60° -ის. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

18.70. პირამიდას ფუძედ აქვს რომში a გვერდითა და β მახვილი კუთხით. ფუძესთან ორწახნაგა კუთხეებს აქვთ ერთი და იგივე α სიდიდე. იპოვეთ პირამიდის ზედაპირის ფართობი, თუ:

$$a=7, \sin \beta = \frac{3}{4}, \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

18.71. პირამიდას ფუძედ აქვს რომში, რომლის მცირე დიაგონალის სიგრძეა d , ხოლო მახვილი კუთხის სიდიდე α . თითოეული გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტცესთან β სიდიდის ორწახნაგა კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $d=2$, $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 3$, $\cos \beta = \frac{1}{6}$.

18.72. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძე 6 სმ-ია და სიმაღლე 9 სმ; პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია და თითოეული უდრის 13 სმ-ს. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.73. პირამიდას ფუძედ აქვს ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფართობია 18 სმ², ხოლო ფუძეზე დაშვებული სიმაღლე 6 სმ-ია. კუთხე პირამიდის ყოველ გვერდით წიბოსა და პირამიდის სიმაღლეს შორის 60° -ია. იპოვეთ იმ სიბრტცის კვეთის ფართობი, რომელიც გადის პირამიდის გვერდით წიბოზე და პირამიდის ფუძის სიმაღლეზე, რომელიც დაშვებულია მოცემულ ფუძეზე.

18.74. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძე 12 სმ-ია, ფერდი – 10 სმ. გვერდითი წახნაგები ფუძესთან ქმნიან 45° -ის ტოლ ორწახნაგა კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე.

18.75. პირამიდას ფუძედ აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის დიაგონალის სიგრძეა $3\sqrt{5}$ და იგი დიდ ფუძესთან აღგენს α კუთხეს. ყველა გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტცისადმი φ კუთხით. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ:

$$\sin 2\alpha = 0,8, \quad \cos \varphi = \frac{2}{3}.$$

18.76. პირამიდას ფუძედ აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის პარალელური გვერდების სიგრძეებია 5 და 9. ყველა გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტეისადმი α კუთხით. იპოვეთ

პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

18.77. პირამიდას ფუძედ აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 5 სმ და 3 სმ, ხოლო ფერდი 7 სმ-ია. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და მისი სიგრძეა $5\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ პირამიდის უდიდესი გვერდითი წიბოს სიგრძე.

18.78. პირამიდის ფუძე კვადრატია, მისი სიმაღლე გადის ფუძის ერთ-ერთ წვეროზე. იპოვეთ პირამიდის გვერდითი ზედაპირი, თუ ფუძის გვერდი 20 დმ-ია, ხოლო სიმაღლეა 21 დმ.

18.79. პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილზე გავლებულია ფუძის პარალელური კვეთა. ფუძის ფართობი არის 9. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

18.80. პირამიდის სიმაღლე დაეოფილია ოთხ ტოლ ნაწილად და დაეოფის წერტილებზე გავლებულია ფუძის პარალელური სიბრტეეები ფუძის ფართობია 400 სმ². იპოვეთ კვეთების ფართობები.

18.81. პირამიდის სიმაღლე 16 სმ-ია. ფუძის ფართობი 512 მ²-ის ტოლია. ფუძიდან რა მანძილითაა დაშორებული ფუძის პარალელური კვეთა, თუ კვეთის ფართობი 50 მ²-ია?

18.82. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო პერპენდიკულარულია ფუძის დიაგონალებიდან ერთ-ერთისა.

18.83. დაამტკიცეთ, რომ თუ წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე უდრის მისი ფუძის გვერდს, მაშინ გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტყესთან შეადგენენ 60° -იან კუთხეს.

18.84. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი ტეტრაედრის წახნაგების ცენტრები მჟორე წესიერი ტეტრაედრის წვეროებია.

18.85. დაამტკიცეთ, რომ წესიერი სამკუთხა პირამიდის არაგადამკვეთი წიბოები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

18.86. ტეტრაედრის ყოველი წახნაგი ტოლგვერდა სამკუთხედაა. დაამტკიცეთ, რომ მოპირდაპირე წიბოების შუაწერტილებზე გამავალი წრფე, პერპენდიკულარულია ამ წიბოებისა.

18.87. დაამტკიცეთ, რომ, თუ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ბრტყელი კუთხე წვეროსთან 60° -ია, მაშინ მოპირდაპირე გვერდითი წიბოები ურთიერთპერპენდიკულარულია.

18.88. კუბის ერთი წვეროდან გავლებულია წახნაგების სამი დიაგონალი; მათი ბოლოები მონაკვეთებითაა შეერთებული. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდა, რომლის წიბოები აგებული ექვსი მონაკვეთია, არის წესიერი ტეტრაედრი.

18.89. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის სიმაღლე ეკუთვნის გვერდით წიბოზე გამავალ, პირამიდის ფუძის პერპენდიკულარულ სიბრტყეს.

18.90. პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთმანეთის ტოლია, ხოლო მისი ფუძე მართკუთხა სამკუთხედაა. დაამტკიცეთ, რომ ამ პირამიდის ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

18.91. დაამტკიცეთ შემდეგი ოთხი დებულების ტოლფასობა:

1. პირამიდის გვერდითი წიბოები ტოლია;
2. პირამიდის გვერდითი წიბოები ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი;
3. პირამიდის გვერდითი წიბოები სიმაღლესთან ქმნიან ტოლ კუთხეებს;
4. პირამიდის ფუძეზე შეიძლება წრეწირის შემოხაზვა და პირამიდის სიმაღლე გადის ამ წრეწირის ცენტრში.

18.92. დაამტკიცეთ შემდეგი სამი დებულების ტოლფასობა:

1. პირამიდის წვეროდან გავლებული გვერდითი წახნაგების სიმაღლეები ტოლია;
2. პირამიდის სიმაღლე გვერდით წახნაგებთან ქმნის ტოლ კუთხეებს;

3. პირამიდის გვერდითი წახნაგები ერთნაირადაა დახრილი ფუძის სიბრტყისადმი.

18.93. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის ფუძესთან მდებარე ორ წახნაგა კუთხეები ტოლია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც პირამიდის ფუძეში შეიძლება წრეწირის ნახაზვა და პირამიდის სიმაღლე გადის ამ წრეწირის ცენტრში.

§19. ცილინდრი. კონუსი. ბირთვი

19.1. ცილინდრის ფუძის რადიუსია 2 მ, სიმაღლეა 3 მ. იპოვეთ ღერძული კვეთის დიაგონალი.

19.2. ცილინდრის ღერძული კვეთა არის კვადრატი, რომლის ფართობია 4. იპოვეთ ცილინდრის ფუძის ფართობი.

19.3. იპოვეთ ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობი, თუ მისი ფუძის ფართობია 25π , ხოლო სიმაღლე 10.

19.4. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე, თუ მისი ღერძული კვეთის ფართობია 42, ხოლო ფუძის ფართობი 9π .

19.5. ცილინდრის ღერძული კვეთა არის კვადრატი. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე, თუ ფუძის რადიუსია 2.

19.6. ცილინდრის სიმაღლეა 6 სმ, ფუძის რადიუსია 5 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გავლებულია ცილინდრის ღერძის პარალელურად მისგან 4 სმ-ის მანძილზე.

19.7. ცილინდრის ღერძის პარალელურად გავლებული კვეთა კვადრატია. იპოვეთ მანძილი ამ კვეთიდან ღერძამდე, თუ ცილინდრის სიმაღლეა 16, ხოლო ფუძის რადიუსი 10.

19.8. ცილინდრის ღერძის პარალელურად გავლებული კვეთის ფართობია 240. იპოვეთ მანძილი ამ კვეთიდან ღერძამდე, თუ ცილინდრის ფუძის რადიუსია 13, ხოლო სიმაღლე 10.

19.9. ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობია 70, ფუძის რადიუსი კი 5. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ცილინდრის ღერძის პარალელურად და მისგან დაშორებულია 3-ის ტოლი მანძილით.

19.10. ცილინდრში გავლებულია ღერძის პარალელური სიბრტყე ისე, რომ ის ფუძის წრეწირიდან 120° -იან რკალს წამოკვეთს. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ მანძილი ღერძიდან მკვეთ სიბრტყემდე $4\sqrt{2}$ სმ-ია, ხოლო მსახველია $2\sqrt{6}$ სმ.

19.11. ცილინდრი, რომლის სიმაღლე h -ის ტოლია, გადაკვეთილია ცილინდრის ღერძის პარალელური სიბრტყით, რომელიც ღერძიდან დაშორებულია d მანძილით. მკვეთი სიბრტყე ფუძის

წრეწირის მოკვეთის α სიდიდის რკალს. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ $h=14$, $d=5$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10}$.

19.12. კონუსის ფუძის რადიუსი 3 მ-ია, სიმაღლე 4 მ. იპოვეთ მსახველი.

19.13. კონუსის l მსახველი ფუძის სიბრტყესთან 30° -იან კუთხეს შეადგენს. იპოვეთ სიმაღლე.

19.14. კონუსის ფუძის რადიუსია R . ღერძული კვეთა მართკუთხა სამკუთხედიანია. იპოვეთ მისი ფართობი.

19.15. კონუსის ფუძის ფართობია 9π სმ², ხოლო მსახველი — 5 სმ. იპოვეთ ღერძული კვეთის ფართობი.

19.16. კონუსის მსახველი l -ის ტოლია, ღერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხე φ -ს უდრის. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობი, თუ:

$$l = \frac{11}{\sqrt{\pi}}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

19.17. კონუსის ფუძის ფართობი 3π სმ²-ია. იპოვეთ ღერძული კვეთის ფართობი, თუ ამ კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხე უდრის φ -ს, $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{5}$.

19.18. კონუსის მსახველისა და სიმაღლის სიგრძეების სხვაობა უდრის m -ს. მათ შორის მოთავსებული კუთხის სიდიდე კი α -ს. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობი, თუ $m = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

19.19. წესიერი კონუსის (ღერძული კვეთი ტოლგვერდა სამკუთხედიანია) ფუძის რადიუსია R . იპოვეთ იმ ორ მსახველზე გავლებული კვეთის ფართობი, რომელთა შორის კუთხეა α .

19.20. კონუსის სიმაღლე არის H . კუთხე სიმაღლესა და მსახველს შორის 60° -ია. იპოვეთ ორ ურთიერთპერპენდიკულარულ მსახველზე გამავალი კვეთის ფართობი.

19.21. კონუსის სიმაღლეა 20 სმ. ფუძის რადიუსია 25 სმ. იპოვეთ წვეროზე გავლებული კვეთის ფართობი, თუ ამ კვეთიდან კონუსის ფუძის ცენტრამდე მანძილია 12 სმ.

19.22. კონუსის სიმაღლეა 6 სმ, ფუძის რადიუსი კი — 3 სმ. იპოვეთ წვეროზე გამავალი იმ კვეთის ფართობი, რომელიც ფუძის წრეწირიდან კვეთს 90° -იან რკალს.

19.23. კონუსის წვეროზე ფუძისადმი 45° -იანი კუთხით გავლებულია სიბრტყე, რომელიც კვეთს ფუძის წრეწირის მეოთხედს. კონუსის სიმაღლე უდრის 10 სმ-ს. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

19.24. კონუსის სიმაღლეა H . წვეროდან რა მანძილზე უნდა გაგავლოთ ფუძის პარალელური სიბრტყე, რომ კვეთის ფართობი ფუძის ფართობის ნახევრის ტოლი იყოს?

19.25. კონუსის ფუძის რადიუსია R . იპოვეთ ფუძის პარალელური კვეთის ფართობი, რომელიც კონუსის სიმაღლეს შუაზე ყოფს.

19.26. კონუსის ფუძის რადიუსი უდრის R -ს. იპოვეთ ფუძის პარალელური იმ კვეთის ფართობი, რომელიც კონუსის სიმაღლეს ყოფს შეფარდებით $m:n$ (წვეროდან ფუძისაკენ).

19.27. კონუსი წვეროდან 3-ის ტოლ მანძილზე გადაკვეთილია ფუძის პარალელური სიბრტყით. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ კონუსის ფუძის რადიუსია 4, ხოლო სიმაღლეა 6.

19.28. ბირთვი, რომლის რადიუსია 41, გადაკვეთილია სიბრტყით, რომელიც ცენტრიდან დაშორებულია 9-ით. იპოვეთ კვეთის რადიუსი.

19.29. ბირთვი, რომლის რადიუსია 13, გადაკვეთილია სიბრტყით, რომელიც ცენტრიდან დაშორებულია 12-ით. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

19.30. ბირთვის რადიუსის შუაწერტილზე გავლებულია ამ რადიუსის პერპენდიკულარული სიბრტყე. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ ბირთვის რადიუსია 6.

19.31. ბირთვი, რომლის რადიუსია 7, ეხება φ სიდიდის ორწახნაგა კუთხის წახნაგებს. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე, თუ $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}$.

19.32. ბირთვი ეხება φ სიდიდის ორწახნაგა კუთხის წახნაგებს. მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე არის 20. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი, თუ $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}$.

19.33. ბირთვი ეხება ორწახნაგა კუთხის წახნაგებს. იპოვეთ ორწახნაგა კუთხის გრადუსული ზომის სიდიდე, თუ ბირთვის რადიუსია 6, ხოლო მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ორწახნაგა კუთხის წიბომდე 12.

19.34. სფეროს რადიუსია 63. წერტილი, რომელიც ძვეს მხებ სიბრტყეზე, შეხების წერტილიდან დაშორებულია 16-ით. იპოვეთ უმოკლესი მანძილი ამ წერტილიდან სფეროს ზედაპირამდე.

19.35. ბირთვის რადიუსის სიგრძეა 4. ბირთვის რადიუსის ბოლოზე გავლებულია კვეთა, რომელიც ამ რადიუსთან 60° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

19.36. ბირთვის რადიუსის სიგრძეა 2. ბირთვის რადიუსის ბოლოზე გავლებულია კვეთა, რომელიც ამ რადიუსთან 30° -იან კუთხეს ადგენს. იპოვეთ მიღებული კვეთის ფართობი.

19.37. ბირთვის ზედაპირზე მოცემულია სამი წერტილი. მათ შორის მანძილებია 6, 8 და 10. ბირთვის რადიუსია 13. იპოვეთ მანძილი ბირთვის ცენტრიდან ამ სამ წერტილზე გავლებულ სიბრტყემდე.

§20. კუბის, პარალელებიპედის, პრიზმის მოცულობა

ამოცანები გამოთვლაზე

20.1. იპოვეთ კუბის მოცულობა მისი წახნაგის d დიაგონალის მიხედვით.

20.2. იპოვეთ კუბის მოცულობა მისი d დიაგონალის მიხედვით.

20.3. იპოვეთ კუბის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალური კვეთის ფართობია $16\sqrt{2}$ სმ².

20.4. იპოვეთ კუბის მოცულობა მისი S ზედაპირის ფართობის მიხედვით.

20.5. კუბის მოცულობა 8 მ³-ია. იპოვეთ მისი ზედაპირის ფართობი.

20.6. მართკუთხა პარალელებიპედის წიბოებია 15 მ, 50 მ და 36 მ. იპოვეთ ამ პარალელებიპედის ტოლდიდი კუბის წიბო.

20.7. მართკუთხა პარალელებიპედის ზედაპირის ფართობი 22 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ პარალელებიპედის მოცულობა, თუ მისი წიბოები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2:3.

20.8. მართკუთხა პარალელებიპედის დიაგონალის სიგრძეა 14 სმ. იპოვეთ პარალელებიპედის მოცულობა, თუ მისი წიბოები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 2:3:6.

20.9. მართკუთხა პარალელებიპედის მოცულობა 48 სმ³-ის ტოლია. იპოვეთ პარალელებიპედის ზედაპირის ფართობი, თუ მისი წიბოები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 1:2:3.

20.10. მართკუთხა პარალელებიპედის ფუძის გვერდებია a და b . მისი დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პარალელებიპედის მოცულობა, თუ $a=6$, $b=8$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$.

20.11. მართკუთხა პარალელებიპედის დიაგონალური კვეთა წარმოადგენს კვადრატს, რომლის ფართობი უდრის 25 სმ²-ს. იპოვეთ პარალელებიპედის მოცულობა, თუ ფუძის გვერდები ისე შეეფარდება ერთმანეთს, როგორც 3:4.

20.12. მართკუთხა პარალელეპიპედის წახნაგების ფართობებია 7 მ², 14 მ² და 32 მ². იპოვეთ მისი მოცულობა.

20.13. მართკუთხა პარალელეპიპედის ერთი წვეროდან გამოხედილი სამივე წიბოს ბოლოებზე გავლებულია სიბრტყე, რომელიც ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60°-იან ორწახნაგა კუთხეს. ფუძის გვერდებია 4 სმ და 3 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.14. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი უდრის 10-ს და გვერდით წიბოსთან ადგენს 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი ფუძის ერთ-ერთი გვერდი 3-ის ტოლია.

20.15. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის სიგრძეა $3\sqrt{2}$ სმ და იგი ერთ წახნაგთან ქმნის 30°-იან კუთხეს, მეორესთან 45°-იანს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.16. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი უდრის l -ს და ორ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგთან შეადგენს α და β კუთხეებს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ $l=4$ სმ,

$$\sin \alpha = \frac{2}{5}, \quad \cos \beta = \frac{3}{5}.$$

20.17. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი უდრის 13 სმ, ხოლო მისი გვერდითი წახნაგების დიაგონალებია $4\sqrt{10}$ სმ და $3\sqrt{17}$ სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.18. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 4 სმ და $2\sqrt{6}$ სმ. პარალელეპიპედის დიაგონალი დიდ გვერდით წახნაგთან ქმნის 30°-იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.19. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის გვერდის სიგრძე 6 სმ-ის ტოლია და ფუძის დიაგონალთან 60°-იან კუთხეს ქმნის. მოცემულ გვერდზე და მის მოპირდაპირე გვერდზე, რომელიც მეორე ფუძეზე მდებარეობს, გავლებულია კვეთა. კვეთის სიბრტყე ფუძის სიბრტყესთან 45°-იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.20. მართკუთხა პარალელეპიპედის ფუძის დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის α -ს. პარალელეპიპედის დიაგონალი შეადგენს ფუძის სიბრტყესთან β კუთხეს, ხოლო პარალელეპიპედის სიმაღლე უდრის H -ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ

$$H = 2\sqrt{2}; \quad \cos \beta = \frac{3}{5}; \quad \sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

20.21. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა უდრის V -ს, ხოლო დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს β კუთხეს. ფუძის დიაგონალებს შორის კუთხე უდრის α -ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის სიმაღლე, თუ $V=25$ სმ, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.22. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b , ხოლო მათ შორის კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლეა h .

20.23. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 3 სმ და 5 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 30° -ია. გვერდითი ზედაპირის ფართობი არის 24 სმ². იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.24. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b , ხოლო მათ შორის კუთხე α -ს ტოლია. პარალელეპიპედის გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდრის S -ს. იპოვეთ პარალელეპიდის მოცულობა, თუ $a=7$, $b=8$, $S=60$, $\sin \alpha = \frac{2}{7}$.

20.25. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია $2\sqrt{2}$ სმ და 5 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 45° . იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ მისი მცირე დიაგონალია 7 სმ.

20.26. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 8 სმ და 15 სმ, ხოლო მათ შორის კუთხე 60° -ია. პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 30° -იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.27. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია 1 სმ და 4 სმ, ხოლო მახვილი კუთხე – 60° . პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი უდრის 5 სმ. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.28. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ ცნობილია, რომ მისი სიმაღლე უდრის h -ს, ხოლო დიაგონალები ფუძესთან ადგენენ α და β კუთხეებს.

20.29. მართი პარალელეპიპედის ფუძე რომბია, რომლის გვერდია 5 სმ. კუთხე ორი გვერდითი წახნაგის სიბრტყეებს შორის უდრის 60° -ს. პარალელეპიპედის დიდი დიაგონალი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45° -იან კუთხეს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.30. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რომბი d მცირე დიაგონალითა და α მახვილი კუთხით. პარალელეპიპედის სიმაღლეა H . იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ

$$d=4, \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}, H=4.$$

20.31. მართი პარალელეპიპედის ფუძის გვერდებია a და b , ხოლო მათ შორის მახვილი კუთხე α -ს ტოლია, ფუძის დიდი დიაგონალი პარალელეპიპედის მცირე დიაგონალის ტოლია.

იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა, თუ $a=3$, $b=2$, $\cos \alpha = \frac{1}{3}$.

20.32. მართი პარალელეპიპედის ფუძის ერთი დიაგონალია 17 სმ, გვერდები კი 9 სმ და 10 სმ. ამ პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობია 334 სმ². იპოვეთ მისი მოცულობა.

20.33. მართი პარალელეპიპედის დიაგონალებია 9 სმ და $\sqrt{33}$ სმ, ფუძის პერიმეტრი უდრის 18 სმ-ს, გვერდითი წიბო კი 4 სმ-ს. იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.34. მართი პარალელეპიპედის ფუძეა რამბი, რამბლის ფართობი 1 მ²-ია. დიაგონალური კვეთების ფართობებია 3 მ² და 6 მ². იპოვეთ პარალელეპიპედის მოცულობა.

20.35. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის მოცულობა.

20.36. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალი ტოლია 9-ის, ხოლო ფუძის გვერდია 4.

20.37. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალი უდრის 6 სმ-ს, ხოლო სიმაღლე ორჯერ მეტია ფუძის გვერდზე.

20.38. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი უდრის a -ს, ხოლო პრიზმის დიაგონალი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α კუთხით. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $a = \sqrt[3]{23}$, $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$.

20.39. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი 3,5 სმ-ია, ხოლო გვერდითი წახნაგის დიაგონალია 2,5 სმ. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.40. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალი 6 სმ-ია. გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი 32 სმ². იპოვეთ მოცულობა.

20.41. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალი გვერდითი წახნაგის სიბრტყესთან ქმნის 30°-იან კუთხეს, ხოლო ფუძის გვერდი უდრის $3\sqrt{2}$ სმ-ს.

20.42. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის დიაგონალის სიგრძე უდრის d -ს და დახრილია გვერდითი წახნაგისადმი φ კუთხით.

იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $d=5$, $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

20.43. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედა ფუძის ცენტრი და ქვედა ფუძის გვერდების შუაწერტილები წარმოადგენს პრიზმაში ჩახაზული პირამიდის წვეროებს. პირამიდის მოცულობაა 9 სმ³. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.44. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა.

20.45. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლეა 5, ხოლო ფუძის პერიმეტრია 12.

20.46. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის სიმაღლე, თუ მისი ფუძის გვერდია 4, ხოლო მოცულობაა $20\sqrt{3}$.

20.47. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი წახნაგი კვადრატია, ხოლო სიმაღლეა 6.

20.48. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის ფუძის გვერდი, თუ მისი სიმაღლეა 2, ხოლო მოცულობაა $18\sqrt{3}$.

20.49. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პრიზმის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი წახნაგი არის კვადრატი, რომლის ფართობია 64.

20.50. წესიერი სამკუთხა პრიზმის გვერდითი წიბო უდრის ფუძის სიმაღლეს, მათზე გაკლებული კვეთის ფართობი კი არის 48 სმ². იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.51. პრიზმას ფუძედ აქვს R რადიუსიან წრეწირში ჩახაზული წესიერი სამკუთხედი, ხოლო გვერდითი წახნაგები კვადრატებია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.52. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის მოცულობა.

20.53. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალი უდრის 8 სმ-ს და პრიზმის გვერდით წიბოსთან ქმნის 30° -იან კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.54. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალია d , ხოლო გვერდითი წახნაგები – კვადრატებია. იპოვეთ მოცულობა, თუ $d=5$.

20.55. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის მოცულობა არის $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ სმ³. იპოვეთ პრიზმის უდიდესი დიაგონალი და უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი, თუ პრიზმის გვერდითი წახნაგები კვადრატებია.

20.56. წესიერი ექვსკუთხა პრიზმის უდიდესი დიაგონალური კვეთა ფუძის ტოლდია. ფუძის გვერდი არის a . იპოვეთ ამ პრიზმის ტოლდები კუბის წიბო.

20.57. წახეგრ ექვსკუთხა პრიზმაში უდიდესი დიაგონალური კვეთის ფართობი 4 მ²-ია, ხოლო მანძილი ორ მოპირდაპირე გვერდით წახნაგს შორის 2 მ-ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.58. მართი ოთხკუთხა პრიზმის სიმაღლეა h , დიაგონალები დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი α და β კუთხეებით, ფუძის დიაგონალებს შორის კუთხე γ -ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{4}{5}, \quad \sin \gamma = \frac{2}{5}, \quad h=5.$$

20.59. მართი ოთხკუთხა პრიზმის ფუძის ფართობია S , დიაგონალური კვეთის ფართობებია P და Q . ორწახნაგა კუთხის სიდიდე მათ შორის უდრის α -ს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $S=6$, $P=10$, $Q=7$, $\sin \alpha = \frac{10}{21}$.

20.60. მართი პრიზმის სიმაღლე უდრის h -ს. მას ფუძედ აქვს მართკუთხა ტრაპეცია α სიდიდის მახვილი კუთხით, რომელიც შემოხაზულია r რადიუსიან წრეწირზე. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ $h=5$, $\sin \alpha = \frac{2}{7}$, $r=1$.

20.61. მართი პრიზმის ფუძეა ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის დიაგონალი უდრის d -ს, ხოლო კუთხე დიაგონალსა და დიდ ფუძეს შორის — α -ს. პრიზმის დიაგონალი დახრილია ფუძის სიბრტყისადმი β კუთხით. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.62. მართ პრიზმას ფუძედ აქვს $ABCD$ ტრაპეცია, რომლის ფუძეები $AD=39$ სმ და $BC=22$ სმ, ხოლო ფერდები $AB=26$ სმ და $CD=25$ სმ. AA_1C_1C კვეთის ფართობი 400 სმ²-ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.63. მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედაა, რომლის კათეტებია 6 სმ და 8 სმ. დიდი გვერდითი წახნაგის ფართობი 20 სმ²-ის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.64. მართ სამკუთხა პრიზმაში ფუძის გვერდები 4 სმ-ის, 5 სმ-ისა და 7 სმ-ის ტოლია, ხოლო გვერდითი წიბო ფუძის დიდი სიმაღლის ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.65. მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედაა, რომლის კათეტების შეფარდებაა 24:7. ფუძის პიპოტენუზა ისე შეეფარდება პრიზმის სიმაღლეს, როგორც 5:2; გვერდითი ზედაპირის ფართობი 140 მ²-ია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.66. მართი პრიზმის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედაა, რომლის ფართობია S და მახვილი კუთხეა α . დიდი გვერდითი

წახნაგის ფართობი Q -ს ტოლია. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა, თუ

$$Q=7, S=12, \sin 2\alpha = 0,75.$$

20.67. მართი პრიზმის ფუძეა მართკუთხა სამკუთხედი α მახვილი კუთხით. უდიდესი გვერდითი წახნაგის დიაგონალი უდრის d -ს და იგი ქმნის გვერდით წიბოსთან β კუთხეს. იპოვეთ პრიზმის მოცულობა.

20.68. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა 24 სმ³. M და N წერტილები პარალელეპიპედის AD და BC წიბოების შუაწერტილებია. იპოვეთ $AA_1 MBB_1 N$ სამკუთხა პრიზმის მოცულობა.

20.69. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ფორმის ჭურჭელი წელით არის სავსე. პრიზმის სიმაღლე 25 სმ-ია, ხოლო ფუძის გვერდი 15 სმ. წყლის მოცულობის რა ნაწილი გადაიდვრება ჭურჭლიდან, თუ მას გადავხრით ფუძის ერთ-ერთი წიბოს მიმართ ისე, რომ ფუძის სიბრტყემ პორიზონტალური სიბრტყესადმი 30° -იანი კუთხე შეადგინოს.

ამოცანები დამტკიცებაზე

20.70. კუბის დიაგონალი d -ს ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ კუბის მოცულობა უდრის $\frac{d^3}{3\sqrt{3}}$ -ს.

20.71. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის გვერდითი წახნაგის დიაგონალი d -ს ტოლია. დაამტკიცეთ, რომ თუ მოსაზღვრე გვერდითი წახნაგების ერთი წვეროდან გამოსული დიაგონალები ერთმანეთთან 60° -იან კუთხეს ქმნიან, მაშინ პრიზმის მოცულობა უდრის $\frac{d^3}{2\sqrt{2}}$ -ს.

20.72. მართკუთხა პარალელეპიპედის წახნაგების ფართობებია Q_1 , Q_2 , Q_3 . დაამტკიცეთ, რომ მისი მოცულობა $\sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}$ -ის ტოლია.

20.73. დახრილი პარალელეპიპედის გვერდით წიბოსთან შექმნილი ორწახნაგა კუთხე α -ს ტოლია, ამ წიბოდან ორ მეზობელ წიბოებამდე მანძილები a და b -ს ტოლია. გვერდითი წიბოა c . დაამტკიცეთ, რომ მოცულობა გამოითვლება ფორმულით $abc \sin \alpha$.

20.74. დაამტკიცეთ, რომ იმ მართი პრიზმის მოცულობა, რომლის ფუძეა ტრაპეცია, უდრის პარალელური გვერდითი

წახნაგების ფართობების საშუალო არითმეტიკულის ნამრავლს ამ წახნაგებს შორის მანძილზე.

20.75. დაამტკიცეთ, რომ მოცემული განზომილების მქონე მართი პარალელეპიპედის მოცულობა უდის, როცა ის მართკუთხაა.

20.76. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალი d -ს ტოლია და ორ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგთან ადგენს α და β კუთხეებს. დაამტკიცეთ, რომ პარალელეპიპედის მოცულობა გამოითვლება ფორმულით

$$d^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}.$$

§21. პირამიდის მოცულობა

ამოცანები გამოთვლაზე

21.1. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლეა 3, ხოლო გვერდითი წიბოა 5.

21.2. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი ფუძის გვერდია 12, ხოლო გვერდითი წიბოა 9.

21.3. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლეა 12, ხოლო აპოთემაა 13.

21.4. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი წიბოა 10, ხოლო ფუძის დიაგონალია 12.

21.5. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლეა 12, ხოლო ფუძის გვერდია $\sqrt{3}$.

21.6. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო არის l და იგი დახრილია ფუძის სიბრტეისადმი 60° -იანი კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.7. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის l -ს და იგი ფუძის სიბრტეისადმი დახრილია α კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $l=9$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

21.8. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი ფუძის გვერდი უდრის a -ს, ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხეა α -ს.

21.9. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა h , ხოლო აპოთემაა და სიმაღლეს შორის კუთხეა α . იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $h=4$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.

21.10. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის დიაგონალი უდრის პირამიდის გვერდით წიბოს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი ფუძის გვერდი უდრის 3 სმ-ს.

21.11. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის ფართობია 36 სმ², გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი 60 სმ². იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.12. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო α -ს ტოლია, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე უდრის α -ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $a=7$, $\cos \alpha = \frac{1}{49}$.

21.13. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლეა 9 სმ, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხეა α . იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 2$.

21.14. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტეისადმი დახრილია α კუთხით, ხოლო სიმაღლისა და ფუძეში წახაზული წრეწირის რადიუსის ჯამი α -ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.15. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობაა V , ხოლო ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე — α . იპოვეთ პირამიდის სიმაღლე, თუ $V=32$, $\operatorname{tg} \alpha=3$.

21.16. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი არის a . იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი დიაგონალური კვეთა ფუძის ტოლდიდია.

21.17. იპოვეთ წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან შეადგენს 45°-იან კუთხეს, ხოლო დიაგონალური კვეთის ფართობი 49 სმ²-ია.

21.18. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო დახრილია ფუძის სიბრტეისადმი α კუთხით, ხოლო დიაგონალური კვეთის ფართობი S -ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $\operatorname{tg} \alpha=4$, $S=9$.

21.19. h სიმაღლისა და ფუძის a გვერდის მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.20. ფუძის a გვერდისა და b გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.21. წესიერი ტეტრაედრის a წიბოს მიხედვით იპოვეთ მისი მოცულობა.

21.22. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის h -ს, ხოლო სიმაღლე — h -ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.23. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის l -ს და ფუძის სიბრტყესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $l=3$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

21.24. წესიერი სამკუთხა პირამიდის აპოთემაა $\sqrt{365}$ სმ, სიმაღლე კი $11\sqrt{3}$ სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.25. წესიერი სამკუთხა პირამიდის აპოთემა 14 სმ-ია. ფუძესთან მდებარე ორწახნაგა კუთხე 45° -ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.26. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლეა 4 სმ, ხოლო მოცულობაა $4\sqrt{3}$ სმ³. იპოვეთ პირამიდის ფუძეზე შემოხაზული წრის ფართობი.

21.27. წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა უდრის $4\sqrt{3}$ სმ³-ს. ფუძეზე შემოხაზული წრის ფართობია 48π სმ². იპოვეთ პირამიდის აპოთემა.

21.28. წესიერი სამკუთხა პირამიდის აპოთემაა m , ფუძის სიმაღლე კი $-h$. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.29. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $\sqrt[3]{60}$ სმ, პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესადმი დახრილია 45° -იანი კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.30. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 12 სმ, ხოლო გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყესადმი 45° -იანი კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.31. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a -ს, ხოლო გვერდითი წახნაგი დახრილია ფუძის სიბრტყესადმი α კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $a=6$, $\operatorname{tg} \alpha=10$.

21.32. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლე არის h , გვერდითი წახნაგი კი ფუძის სიბრტყესთან ქმნის 60° -იან კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.33. წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობაა $3\sqrt{3}$, კუთხე აპოთემასა და ფუძის სიბრტყეს შორის 30° -ია. იპოვეთ პირამიდის აპოთემა.

21.34. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები ურთიერთმართობულია, თითოეული მათგანი h -ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.35. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა $6\sqrt{2}$ სმ, გვერდითი წიბოები კი ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.36. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი ტოლია 1 სმ, ხოლო მისი გვერდითი ზედაპირი — 3 სმ². იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.37. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი უდრის a -ს, ხოლო პირამიდის წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $a=2$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$.

21.38. იპოვეთ წესიერი სამკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი სიმაღლე არის h , ხოლო წვეროსთან მდებარე ყველა ბრტყელი კუთხე მართია.

21.39. წესიერი ტეტრაედრის წახნაგზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსია $2\sqrt{6}$. იპოვეთ ტეტრაედრის მოცულობა.

21.40. იპოვეთ კუბის მოცულობის შეფარდება წესიერი ტეტრაედრის მოცულობასთან, თუ ცნობილია, რომ ტეტრაედრის წიბო უდრის კუბის წახნაგის დიაგონალს.

21.41. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგი ფუძის სიბრტყისადმი დახრილია α კუთხით, ხოლო სიმაღლისა და ფუძეში ნახაზული წრეწირის რადიუსის ჯამი a -ს ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.42. h სიმაღლისა და ფუძის a გვერდის მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.43. ფუძის a გვერდისა და h გვერდითი წიბოს მიხედვით იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა.

21.44. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 4 სმ, გვერდითი წიბო კი — $\sqrt{43}$ სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.45. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა 6 სმ³-ია. ფუძის გვერდი 1 სმ-ია. იპოვეთ გვერდითი წიბო.

21.46. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი a -ს ტოლია, ხოლო ფუძესთან შედგენილი ორწახნაგა კუთხე 45° -ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.47. იპოვეთ წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი წიბო l -ის ტოლია და პირამიდის სიმაღლესთან ქმნის 30° -იან კუთხეს.

21.48. წესიერი ექვსკუთხა პირამიდის მოცულობაა 4116 სმ³, ხოლო გვერდითი წიბოს სიგრძე ორჯერ მეტია ფუძის გვერდის სიგრძეზე. იპოვეთ ფუძის გვერდის სიგრძე.

21.49. პირამიდის ფუძე მართკუთხედია, რომლის გვერდებია 9 მ და 12 მ. ყველა გვერდითი წიბო 12,5 მ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.50. პირამიდას ფუძედ აქვს მართკუთხედი, რომლის გვერდებია 6 სმ და 15 სმ, სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და გვერდითი ზედაპირის ფართობია 126 სმ². იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.51. ოთხკუთხა პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის დიაგონალია b , ხოლო დიაგონალებს შორის მდებარე კუთხე – 60° . ამასთან პირამიდის თითოეული გვერდითი წიბო ფუძის სიბრტყესთან ადგენს 45° კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.52. ოთხკუთხა პირამიდის ფუძეა მართკუთხედი, რომლის დიაგონალი უდრის d -ს, ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე α -ს, პირამიდის თითოეული წიბო დახრილია ფუძის სიბრტყესადმი β კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $d=10$ სმ, $\sin \alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} \beta = 3$.

21.53. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა 18. O წერტილი არის $A_1 B_1 C_1 D_1$ ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი. იპოვეთ $OABCD$ პირამიდის მოცულობა.

21.54. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა 30. იპოვეთ $B_1 ABCD$ პირამიდის მოცულობა.

21.55. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა 120. M და N წერტილები შესაბამისად $A_1 B_1$ და $A_1 D_1$ წიბოების შუაწერტილებია. იპოვეთ $AA_1 MN$ პირამიდის მოცულობა.

21.56. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობაა 96. M , N და E წერტილები შესაბამისად AA_1 , $A_1 B_1$ და $A_1 D_1$ წიბოების შუაწერტილებია. იპოვეთ $A_1 MNE$ პირამიდის მოცულობა.

21.57. a წიბოს მქონე კუბის ცენტრი შეერთებულია კუბის ყველა წვეროსთან. იპოვეთ თითოეული წარმოქმნილი პირამიდის მოცულობა.

21.58. წესიერი ოთხკუთხა პრიზმის ზედა ფუძის ცენტრი შეერთებულია ქვედა ფუძის გვერდების შუაწერტილებთან. იპოვეთ წარმოქმნილი პირამიდის მოცულობა, თუ პრიზმის მოცულობა უდრის V -ს.

21.59. პირამიდის ფუძეა 30° -იანი მახვილი კუთხის მქონე რომბი, ხოლო გვერდითი წახნაგები დახრილია ფუძისადმი 60° კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ რომბში ჩახსული წრეწირის რადიუსი არის r .

21.60. პირამიდას ფუძედ აქვს რომბი, რომლის გვერდია 15 სმ-ია. ამ პირამიდის თითოეული წახნაგი ფუძისადმი დახრილია 45° -იანი კუთხით. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ მისი გვერდითი ზედაპირია 300 სმ².

21.61. პირამიდას ფუძედ აქვს პარალელოგრამი, რომლის გვერდების სიგრძეებია 5 მ და 4 მ. ერთი დიაგონალის სიგრძე კი 3 მ; პირამიდის სიმაღლის სიგრძეა 17, 75 მ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.62. პირამიდას ფუძედ აქვს ტოლფერდა ტრაპეცია, რომლის ფუძეებია 3 სმ და 5 სმ, ფერდი კი 7 სმ. პირამიდის სიმაღლე გადის ფუძის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილზე და უდის იგივე გვერდითი წიბო 10 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.63. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა ტრაპეციაა, რომლის პარალელური გვერდებია 10 სმ და 6 სმ. ყოველი გვერდითი წახნაგი ფუძესთან ქმნის ϕ -ს ტოლ ორწახნაგა კუთხეს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $\operatorname{tg} \phi = 0,5$.

21.64. პირამიდის ფუძე ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 6 სმ, 6 სმ და 8 სმ. თითოეული გვერდითი წიბო 9 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.65. პირამიდის ფუძეა ტოლფერდა სამკუთხედი, რომლის ფუძე ტოლია 6 სმ, ხოლო სიმაღლე – 9 სმ. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ თითოეული გვერდითი წიბო უდრის 13 სმ.

21.66. პირამიდის ფუძეა სამკუთხედი, რომლის გვერდებია 6 სმ, 5 სმ და 5 სმ. პირამიდის გვერდითი წახნაგები მის ფუძესთან ადგენენ 45° -იან კუთხეებს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.67. პირამიდის ფუძეა ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის გვერდია a . ერთ-ერთი გვერდითი წახნაგი ასევე ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომელიც ფუძის მართობულია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ $a = 2\sqrt[3]{5}$ სმ.

21.68. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოებია 3 სმ, 4 სმ და 5 სმ და ისინი ურთიერთპერპენდიკულარულია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.69. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგები ურთიერთპერპენდიკულარულია; მათი ფართობებია 6 მ², 4 მ² და 3 მ². იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.70. სამკუთხა პირამიდის ორი ურთიერთპერპენდიკულარული წახნაგი ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის თითოეული გვერდი 4 სმ-ია. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

21.71. პირამიდის ფუძე მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის პოტენუზა $4\sqrt{3}$ სმ-ია, ხოლო მახვილი კუთხე არის – 30° . პირამიდის გვერდითი წიბოები ფუძის სიბრტეისადმი 45° -იანი კუთხითაა დახრილი. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ამოცანები დამტკიცებაზე

21.72. დაამტკიცეთ, რომ იმ პირამიდის მოცულობა, რომლის ფუძე არის V მოცულობის მქონე კუბის წახნაგი, ხოლო წვერო ამ კუბის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილი, გამოითვლება ფორმულით $\frac{1}{6}V$.

21.73. დაამტკიცეთ, რომ სამკუთხა პირამიდის მოცულობა მისი სრული ზედაპირის ფართობისა და წახაზული სფეროს რადიუსის ნამრავლის მესამედის ტოლია.

21.74. დაამტკიცეთ, რომ, თუ წერტილი ძვეს წესიერი ტეტრაედრის ზედაპირზე ან მის შიგნით, მაშინ ამ წერტილიდან ყველა წახნაგამდე მანძილების ჯამი უდრის ტეტრაედრის სიმაღლეს.

21.75. სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები წვეილ-წვეილად პერპენდიკულარულია, გვერდითი წახნაგების ფართობებია:

S_1, S_2, S_3 . დაამტკიცეთ, რომ მოცულობა $\frac{1}{3}\sqrt{2S_1S_2S_3}$ -ის ტოლია.

21.76. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის სიმაღლეზე გამავალი სიბრტყით მიღებული პირამიდების მოცულობები ტოლია, თუ პირამიდის წვეროების რაოდენობა კენტიია.

§22. ცილინდრის, კონუსის, ბირთვის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი

ამოცანები გამოთვლაზე

22.1. H სიმაღლისა და ფუძის R რადიუსის მიხედვით იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.

22.2. ცილინდრის სიმაღლეა 7 სმ, ფუძის რადიუსი კი 2 სმ. იპოვეთ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი.

22.3. იპოვეთ იმ სხეულის მოცულობა, რომელსაც ქმნის კვადრატი მისი a გვერდის გარშემო ბრუნვის დროს.

22.4. მართკუთხედის გვერდებია a და b . იპოვეთ ამ მართკუთხედის a გვერდის გარშემო ბრუნვით მიღებული ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

22.5. ცილინდრის ღერძული კვეთა არის კვადრატი, რომლის დიაგონალი უდრის 4 სმ-ს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.6. ცილინდრის მოცულობაა 35π მ³. ღერძული კვეთის ფართობი კი -8 მ². იპოვეთ ცილინდრის ფუძის დიამეტრი.

22.7. ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობი $\frac{13}{2\pi}$ სმ²-ის

ტოლია. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

22.8. ტოლგვერდა ცილინდრის სიმაღლე უდრის h -ს. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

22.9. ცილინდრის ფუძის დიამეტრი უდრის 1 სმ-ს, სიმაღლე კი – ფუძის წრეწირის სიგრძეს. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

22.10. ცილინდრის ფუძის რადიუსი უდრის R -ს, მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი უდრის ფუძეების ფართობთა ჯამს. იპოვეთ სიმაღლე.

22.11. ცილინდრის ღერძული კვეთის ფართობია Q . იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

22.12. იპოვეთ ტოლგვერდა ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ მისი გვერდითი ზედაპირის ფართობია $64\frac{2}{3}$ სმ².

22.13. ცილინდრის სიმაღლე 10 სმ-ით მეტია მისი ფუძის რადიუსზე. იპოვეთ ფუძის რადიუსი, თუ ცილინდრის სრული ზედაპირის ფართობია 144π სმ².

22.14. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი არის 5, ხოლო ფუძის წრეწირის სიგრძე – 3π . იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.15. ცილინდრის ღერძის პარალელურად გაველებული სიბრტყე ფუძის წრეწირს ეოვს შეფარდებით 1:5. კვეთის ფართობი უდრის 15 სმ²-ს. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

22.16. ცილინდრის ფუძის ქორდაზე, რომლის სიგრძეა 16, გაველებულია ფუძის მართობული კვეთა. იპოვეთ მანძილი ამ კვეთიდან ცილინდრის ღერძამდე, თუ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ფართობია 7, ხოლო მოცულობა 35.

22.17. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი წარმოადგენს α -გვერდიან კუადრატს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა.

22.18. ცილინდრის სიმაღლე არის H . მისი გვერდითი ზედაპირის შლილში მსახველი დიაგონალთან შეადგენს 60° -იან კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ $H = 2\sqrt[3]{\pi}$.

22.19. ცილინდრის სიმაღლეა H . ცილინდრის მსახველი მისი გვერდითი ზედაპირის შლილის დიაგონალთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის ზედაპირის ფართობი, თუ.

$$H = \sqrt{\frac{3}{\pi}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = 6\pi.$$

22.20. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი წარმოადგენს მართკუთხედს, რომლის დიაგონალი უდრის d -ს და ფუძესთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ $d = 7\sqrt[3]{\pi}$, $\sin \alpha = \frac{4}{7}$.

22.21. ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის შლილი მართკუთხედი, რომლის დიაგონალები გადაკვეთისას ქმნის α კუთხეს. დიაგონალის სიგრძე უდრის d -ს. იპოვეთ ცილინდრის გვერდითი ზედაპირი.

22.22. ცილინდრის ღერძული კვეთის დიაგონალები ერთმანეთს კვეთს ფუძისაკენ მიმართული α კუთხით. ცილინდრის მოცულობა უდრის V -ს. იპოვეთ ცილინდრის სიმაღლე, თუ

$$V=16, \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\pi}.$$

22.23. წრეში, რომელიც ცილინდრის ფუძეს წარმოადგენს, გაველებულია a სიგრძის ქორდა. ამ ქორდის შესაბამისი ცენტრალური კუთხე α -ს ტოლია. ცილინდრის სიმაღლე უდრის H -ს.

იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ $a = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$, $H=16$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$.

22.24. ცილინდრი გადაკვეთილია ღერძის პარალელური სიბრტყით, რომელიც ფუძის წრეწირს α სიდიდის რკალს ნამოჭრის. კვეთის დიაგონალის სიგრძეა d და ფუძესთან β სიდიდის კუთხეს ქმნის. იპოვეთ ცილინდრის მოცულობა, თუ

$$d = 4\sqrt[3]{\frac{7}{\pi}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{26}, \quad \sin \beta = \frac{5}{8}.$$

22.25. კვადრატი, რომლის გვერდის სიგრძეა $\sqrt[3]{\frac{31}{\pi}}$, ბრუნავს მის გარეთ მდებარე ღერძის გარშემო, რომელიც კვადრატის ღერძის პარალელურია და დაშორებულია მისგან გვერდის სიგრძის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა.

22.26. a -გვერდიანი კვადრატი ბრუნავს მის გარეთ მდებარე ღერძის გარშემო, რომელიც კვადრატის გვერდის პარალელურია და დაშორებულია მისგან გვერდის ტოლი მანძილით. იპოვეთ მიღებული სხეულის ზედაპირის ფართობი.

22.27. H სიმაღლისა და ფუძის R რადიუსის მიხედვით იპოვეთ კონუსის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.

22.28. l მსახველისა და ფუძის R რადიუსის მიხედვით იპოვეთ კონუსის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.

22.29. კონუსის სიმაღლეა 6 სმ. ფუძის რადიუსი კი – 8 სმ. იპოვეთ გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

22.30. კონუსის სიმაღლეა 4 სმ, მსახველი კი – 5 სმ. იპოვეთ სრული ზედაპირის ფართობი და მოცულობა.

22.31. კონუსის მსახველის სიგრძე 4-ის ტოლია, ხოლო ფუძის ფართობია 7π . იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.32. კონუსის l მსახველი ფუძის სიბრტყესთან α კუთხეს ადგენს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.33. კონუსის ფუძის ფართობია S , ხოლო მსახველები ფუძის სიბრტყესადმი დახრილია α კუთხით. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირი.

22.34. კონუსის სიმაღლის სიგრძე h -ის ტოლია, ხოლო მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე უდრის α -ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ $h = 3\sqrt{\frac{55}{2\pi}}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

22.35. კონუსის ფუძის ფართობია S , ხოლო მსახველი ფუძის სიბრტყესადმი დახრილია α კუთხით. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ $S = \sqrt[3]{36\pi}$, $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

22.36. კონუსის სიმაღლის სიგრძეა 24 სმ, ხოლო მოცულობა 392π სმ³. იპოვეთ კონუსის მსახველის სიგრძე.

22.37. კონუსის მოცულობა უდრის 9π სმ³-ს, ხოლო სიმაღლე 3 სმ-ია. იპოვეთ კუთხე მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის.

22.38. კონუსის V მოცულობისა და R ფუძის რადიუსის მიხედვით იპოვეთ ღერძული კვეთის ფართობი.

22.39. კონუსის ღერძული კვეთა არის ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის ფართობი 9 მ²-ია. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.40. კონუსის სიმაღლის სიგრძეა $\sqrt[3]{\frac{69}{\pi}}$ სმ, ღერძული კვეთა კი მართკუთხა სამკუთხედი. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.41. კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი S -ის ტოლია, ხოლო მსახველსა და სიმაღლეს შორის კუთხე უდრის α -ს. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობი, თუ $S=147$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

22.42. კონუსის ფუძის რადიუსი R -ის ტოლია, ხოლო მსახველსა და ფუძის სიბრტყეს შორის კუთხე უდრის α -ს. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი, თუ $R = \sqrt{\frac{57}{2\pi}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{7}$.

22.43. კონუსის სიმაღლის სიგრძე ფუძის წრეწირში ნახაზული წესიერი ოთხკუთხედის გვერდის ნახევრის ტოლია. კონუსის ფუძის ფართობია 25 სმ^2 . იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

22.44. კონუსის სიმაღლის სიგრძე კონუსის ფუძის წრეწირში ნახაზული წესიერი სამკუთხედის გვერდის სიგრძეზე ორჯერ მეტია. კონუსის ღერძითი კვეთის ფართობი უდრის 32 სმ^2 -ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.45. კონუსის ფუძის ფართობია $\frac{49}{\pi} \text{ მ}^2$, ღერძული კვეთის ფართობი კი $- 39 \text{ მ}^2$. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.46. კონუსის მსახველსა და მის სიმაღლეს შორის სხვაობა უდრის d -ს, ხოლო მათ შორის მდებარე კუთხე $- \alpha$ -ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.47. იპოვეთ იმ კონუსის მოცულობა, რომლის ფუძეში მდებარე a სიგრძის ქორდა ჭიმავს α რკალს, ხოლო კონუსის სიმაღლე H .

22.48. კონუსის ფუძეში a სიგრძის ქორდა ჭიმავს α სიდიდის რკალს. მსახველსა და სიმაღლეს შორის კუთხე უდრის β -ს. იპოვეთ კონუსის მოცულობა, თუ $a = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{8}$.

22.49. უდიდესი კუთხე კონუსის მსახველთა შორის 60° -ია. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირისა და ფუძის ფართობის შეფარდება.

22.50. ტოლგვერდა კონუსის H სიმაღლის მიხედვით იპოვეთ მისი სრული ზედაპირის ფართობი.

22.51. კონუსის ფუძის ფართობია $9\pi \text{ სმ}^2$, მისი სრული ზედაპირის ფართობი $- 24\pi \text{ სმ}^2$. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.52. კონუსის სიმაღლე ისე შეეფარდება მსახველს, როგორც 4:5, კონუსის მოცულობა კი $96\pi \text{ სმ}^3$ -ია. იპოვეთ მისი სრული ზედაპირის ფართობი.

22.53. კონუსის სიმაღლე 15 მ-ია. მოცულობა კი უდრის $320\pi \text{ მ}^3$ -ს. იპოვეთ სრული ზედაპირის ფართობი.

22.54. კონუსის სიმაღლე 6 სმ-ია, გვერდითი ზედაპირის ფართობი კი $24\pi \text{ სმ}^2$. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.55. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მისი ფუძის ფართობია 48 მ^2 , ხოლო ღერძითი კვეთის ფართობი $- \frac{55}{\pi} \text{ მ}^2$.

22.56. კონუსის სრული ზედაპირის ფართობი უდრის 9 სმ²-ს, ხოლო დერძული კვეთის წვეროსთან მდებარე კუთხეა 60°. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.57. კონუსის სიმაღლე უდრის მისი ფუძის დიამეტრს. იპოვეთ კონუსის ფუძის ფართობის შეფარდება გვერდით ზედაპირთან.

22.58. კონუსის ფუძის ცენტრიდან მის მსახველამდე მანძილი უდრის d -ს, ხოლო კუთხე მსახველსა და სიმაღლეს შორის — α -ს. იპოვეთ კონუსის სრული ზედაპირი.

22.59. კონუსის სრული ზედაპირი ფუძის პარალელური კვეთით გაყოფილია შუაზე. კონუსის ფუძის რადიუსი უდრის 1 სმ-ს და მსახველი — 8 სმ-ს. იპოვეთ მსახველის ზედა მონაკვეთი.

22.60. კონუსის სიმაღლის შუეწერტილზე გაგლეზულია ფუძის პარალელური სიბრტყე. კვეთის ფართობია 17,25 მ², ხოლო კონუსის სიმაღლის სიგრძე კი 4 მ. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.61. მართკუთხა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი დიდი კათეტის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის გვერდითი ზედაპირის ფართობი, თუ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 3 და 4.

22.62. მართკუთხა სამკუთხედი ბრუნავს თავისი მცირე კათეტის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვით მიღებული სხეულის მოცულობა, თუ მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია 5 და 12.

22.63. ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი ბრუნავს ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ ბრუნვის სხეულის მოცულობა, თუ ჰიპოტენუზის სიგრძეა $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ სმ.

22.64. მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია a და b , ბრუნავს ჰიპოტენუზის გარშემო. იპოვეთ მიღებული სხეულის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.

22.65. კონუსის ფუძის რადიუსია $\sqrt{5}$. ამ კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილი არის სექტორი, რომლის ცენტრალური კუთხეა 120°. იპოვეთ კონუსის გვერდითი ზედაპირის ფართობი.

22.66. კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილი არის სექტორი, რომლის ფართობია $1,5\pi$, ხოლო ცენტრალური კუთხე კი 120°. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.

22.67. კონუსის სიმაღლეა $\sqrt[3]{\frac{48}{\pi}}$. ამ კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილი არის სექტორი 120°-იანი ცენტრალური კუთხით. იპოვეთ კონუსის მოცულობა.

22.68. კონუსის სიმაღლეა h , ხოლო მოცულობა $\frac{\pi h^3}{24}$. ამ კონუსის გვერდითი ზედაპირის შლილი არის სექტორი. იპოვეთ სექტორის ცენტრალური კუთხე.

22.69. ბირთვის რადიუსი 1 მ-ია. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი.

22.70. სამი ბირთვის რადიუსებია: 3 სმ, 4 სმ და 5 სმ. იპოვეთ იმ ბირთვის რადიუსი, რომლის მოცულობა ამ ბირთვების მოცულობათა ჯამს უდრის.

22.71. ბირთვის ზედაპირის ფართობი 225π მ²-ია. იპოვეთ მისი მოცულობა.

22.72. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი, თუ დიდი წრის ფართობი 1 მ²-ია.

22.73. იპოვეთ ბირთვის ზედაპირის ფართობი, თუ მოცემულია მისი მოცულობა V .

22.74. ბირთვის O ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყემდე მანძილი უდრის d -ს. ბირთვის OA რადიუსსა და კვეთის O_1A რადიუსს შორის კუთხე α -ს ტოლია. იპოვეთ ბირთვის მოცულობა, თუ

$$d = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{3}.$$

22.75. მანძილი მხებ სიბრტყეზე აღებული A წერტილიდან სფეროს ცენტრამდე d -ს ტოლია. AO მონაკვეთი დახრილია მხები სიბრტყისადმი α კუთხით. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის

ფართობი, თუ $d = \frac{5}{\sqrt{\pi}}, \quad \cos \alpha = \frac{2}{5}$.

22.76. სამკუთხედის პიპოტენუზა და კათეტები სამი სფეროს დიამეტრებია. როგორი დამოკიდებულებაა მათი ზედაპირების ფართობებს შორის?

22.77. სფეროში ცენტრის ერთ მხარეზე გავლებულია ორი პარალელური კვეთა, მათი ფართობებია 49π დმ² და 4π მ². მათ შორის მანძილი 9 დმ-ია. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი.

22.78. სფეროს ორი მხები სიბრტყე გადაიკვეთებიან α კუთხით, რომელიც მიმართულია სფეროს ზედაპირისაკენ. შეხების წერტილებს შორის მანძილი უდრის 30 სმ-ს. იპოვეთ სფეროს ზედაპირის ფართობი, თუ $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{7}$.

22.79. მეტალის ცილინდრისაგან, რომლის დიამეტრი და სიმაღლე ერთმანეთის ტოლია და თითოეული უდრის $40\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ სმ, ჩამოასხეს ბირთვი. იპოვეთ ამ ბირთვის რადიუსი.

22.80. მეტალის ბირთვისაგან ჩამოასხეს კონუსი, რომლის სიმაღლე ორჯერ მეტია ფუძის რადიუსზე. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე, თუ ბირთვის რადიუსია $5\sqrt[3]{4}$ სმ.

22.81. R რადიუსის მქონე ლითონის ბირთვიდან ჩამოასხეს კონუსი, რომლის გვერდითი ზედაპირი სამჯერ მეტია ფუძის ფართობზე. იპოვეთ კონუსის სიმაღლე.

22.82. მეტალის კუბი გადაადნეს და ჩამოასხეს ექვსი ერთნაირი ბირთვი. იპოვეთ ბირთვის რადიუსი, თუ კუბის გვერდია $2\sqrt[3]{\pi}$.

22.83. მეტალის ცილინდრი გადაადნეს, რისგანაც ჩამოასხეს ოთხი ერთნაირი კუბი. იპოვეთ კუბის წიბოს სიგრძე, თუ ცილინდრის ფუძის რადიუსია 2, სიმაღლე კი π^2 .

ამოცანები დამტკიცებაზე

22.84. დაამტკიცეთ, რომ ტოლგვერდა კონუსის სრული ზედაპირი ტოლდოდა იმ სფეროს ზედაპირისა, რომელიც აგებულია კონუსის სიმაღლეზე, როგორც დიამეტრზე.

22.85. დაამტკიცეთ, რომ კვადრატის ბრუნვით თავის გვერდის გარშემო მიღებული სხეულის ზედაპირი ამ კვადრატის გვერდის ტოლი რადიუსის მქონე სფეროს ზედაპირის ტოლდოდა.

22.86. დაამტკიცეთ, რომ კონუსის მოცულობა უდრის მისი გვერდითი ზედაპირისა და ფუძის ცენტრიდან მსახველამდე მანძილის ნამრავლის მესამედს.

22.87. ტოლგვერდა კონუსის სიმაღლე ბირთვის დიამეტრს წაზოადგენს. დაამტკიცეთ, რომ კონუსის სრული ზედაპირი ბირთვის ზედაპირის ტოლდოდა.

22.88. დაამტკიცეთ, რომ ტოლგვერდა კონუსის მოცულობის შეფარდება იმ ბირთვის მოცულობასთან, რომლის დიამეტრიც კონუსის ფუძის დიამეტრის ტოლია, უდრის $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

22.89. ბირთვი კუბის ეკვლა წახნაგს ეხება. დაამტკიცეთ, რომ ამ სხეულების ზედაპირების ფართობთა შეფარდება ტოლია $\frac{\pi}{6}$.

22.90. დაამტკიცეთ, რომ თუ უდიდესი კუთხე კონუსის მსახველთა შორის 120° -ია, მაშინ მისი გვერდითი ზედაპირი ისეთი ცილინდრის გვერდითი ზედაპირის ტოლდია, რომელსაც აქვს კონუსის ფუძე და სიმაღლე.

22.91. დაამტკიცეთ, რომ თუ ABC სამკუთხედი ბრუნავს $BC=a$ გვერდის გარშემო, მაშინ მიღებული სხეულის მოცულობა უდრის $\frac{4}{3}\pi\frac{Q^2}{a}$, სადაც Q სამკუთხედის ფართობია.

22.92. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამ ტოლ ნაწილად გაყოფილი ნახევარწრივი ბრუნავს თავისი დიამეტრის გარშემო, მაშინ შუა რკალით შემოხაზული ზედაპირი კიდური რკალებით შემოხაზული ზედაპირების ჯამის ტოლდია.

22.93. კონუსის ფუძე ჩახაზულია a წიბოს მქონე კუბის წახნაგში, ხოლო წვერო მდებარეობს მოპირდაპირე წახნაგის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილში. დაამტკიცეთ, რომ კონუსის მოცულობა $V = \frac{1}{12}\pi a^3$.

22.94. დაამტკიცეთ, რომ თუ ორ ტოლ კონუსს აქვს საერთო სიმაღლე და პარალელური ფუძეები, მაშინ მათი საერთო ნაწილის მოცულობა შეადგენს თითოეული მათგანის მოცულობის მეოთხედს.

22.95. ვთქვათ, V , V_1 და V_2 არის მართკუთხა სამკუთხედის პიპოტენუსისა და კათეტების გარშემო ბრუნვით მიღებული სხეულების მოცულობა. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}.$$

22.96. R -რადიუსიან და H სიმაღლის მქონე კონუსში — ჩახაზულია r -რადიუსიანი და h სიმაღლის მქონე ცილინდრი. დაამტკიცეთ, რომ $\frac{r}{R} + \frac{h}{H} = 1$.

§23. სხვადასხვა სახის ამოცანები

ამოცანები გამოთვლაზე

23.1. ტოლფერდა სამკუთხედში ფუძე და სიმაღლე 4 მ-ის ტოლია. მოცემული წერტილი სამკუთხედის სიბრტყიდან დაშორებულია 6 მ-ით. იპოვეთ ამ წერტილიდან სამკუთხედის წვეროებამდე მანძილები, თუ ცნობილია, რომ ისინი ტოლია.

23.2. ABC სამკუთხედში $AB=13$ სმ, $BC=14$ სმ, $AC=15$ სმ. AC გვერდის D შუაწერტილიდან სამკუთხედის სიბრტეისადმი აღმართულია DM მართობი, რომლის სიგრძე 4 სმ-ის ტოლია. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან სამკუთხედის საშუალო სიგრძის გვერდამდე.

23.3. მართი კუთხის სიბრტეის გარეთ მდებარე M წერტილი კუთხის წვეროდან დაშორებულია a მანძილით, ხოლო კუთხის გვერდების შემცველი წრფეებიდან – b მანძილით. იპოვეთ მანძილი M წერტილიდან კუთხის სიბრტეამდე.

23.4. მართკუთხა სამკუთხედის კათეტებია $a=8$ სმ და $b=6$ სმ. a კათეტზე გავლებულია სიბრტეე, რომელიც b კათეტთან 60° -იან კუთხეს ქმნის. იპოვეთ ჰიპოტენუზის გვერდის სიბრტეეზე.

23.5. კვადრატის სიბრტეე ერთ-ერთ მის გვერდზე გავლებულ სიბრტეესთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ იმ კუთხის სინუსი, რომელსაც ქმნის იმავე სიბრტეესთან კვადრატის დიაგონალი,

$$\text{თუ } \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

23.6. პარალელოგრამის გვერდზე გავლებულია სიბრტეე, რომელიც პარალელოგრამის მოპირდაპირე გვერდიდან დაშორებულია a მანძილით. იპოვეთ მანძილი პარალელოგრამის დიაგონალების გადაკვეთის წერტილიდან ამ სიბრტეემდე.

23.7. წესიერი სამკუთხედის წვეროები დაშორებულია α სიბრტეიდან 51, 45 და 27-ის ტოლი მანძილებით. იპოვეთ მანძილი სამკუთხედის ცენტრიდან α სიბრტეემდე.

23.8. რომბის ერთ გვერდზე გავლებულია სიბრტეე, რომელიც მოპირდაპირე გვერდიდან დაშორებულია 4 მ-ით. ამ სიბრტეეზე დიაგონალების გვერდების სიგრძეებია 8 მ და 2 მ. იპოვეთ რომბის გვერდების გვერდები.

23.9. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდის სიგრძეა $9\sqrt{2}$ სმ, ხოლო გვერდითი წიბოსი – 10 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის დიაგონალზე და გვერდითი წიბოს პარალელურია.

23.10. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია $5\sqrt[4]{27}$ სმ. გვერდითი წიბო სიმაღლესთან 30° -იან კუთხეს ქმნის. ფუძის ერთ წვეროზე ამ წვეროს მოპირდაპირე წიბოს პერპენდიკულარულად გავლებულია სიბრტეე. იპოვეთ კვეთის ფართობი.

23.11. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის სიმაღლე 20 სმ-ია, ხოლო ფუძის გვერდი კი – 30 სმ. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი,

რომელიც გადის ფუძის გვერდზე ამ გვერდის მოპირდაპირე გვერდითი წახნაგის მართობულად.

23.12. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის თითოეული წიბო უდრის a -ს. იპოვეთ პირამიდის ფუძის ორი მოსაზღვრე გვერდის შუაწერტილებსა და პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილზე გაკლებული კვეთის ფართობი.

23.13. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის დიაგონალის სიგრძეა $4\sqrt{2}$ სმ, ხოლო კუთხე ორ მოსაზღვრე გვერდით წახნაგებს შორის უდრის 120° -ს. იპოვეთ პირამიდის სრული ზედაპირის ფართობი.

23.14. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდზე გაკლებულია სიბრტყე, რომელიც ამ გვერდის პირდაპირ მდებარე გვერდითი წიბოს მართობულია. იპოვეთ კვეთის ფართობი, თუ ფუძის გვერდია a , ხოლო პირამიდის სიმაღლეა h .

23.15. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის გვერდის ტოლია. გვერდითი წახნაგების ცენტრები შეერთებულია ერთმანეთთან. იპოვეთ მიღებული სამკუთხედის ფართობის შეფარდება პირამიდის ფუძის ფართობთან.

23.16. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო ფუძის გვერდთან ქმნის α კუთხეს. იპოვეთ კუთხე გვერდით წიბოსა და პირამიდის სიმაღლეს შორის.

23.17. მანძილი წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდიდან მის მოპირდაპირე წიბომდე ორჯერ ნაკლებია ფუძის გვერდზე. იპოვეთ კუთხე გვერდით წახნაგსა და პირამიდის ფუძის სიბრტყეს შორის.

23.18. წესიერი სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბო უდრის l -ს და იგი ფუძის სიბრტყესთან ადგენს α კუთხეს. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის გვერდზე და

პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილზე, თუ $l=10$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

23.19. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის აპოთემა უდრის m -ს, ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხე ϕ -ს. იპოვეთ ფუძის ცენტრზე, გვერდითი წახნაგის პარალელურად გაკლებული კვეთის ფართობი, თუ $m=20$, $\operatorname{tg} \frac{\phi}{2} = \frac{9}{20}$.

23.20. წესიერი სამკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდია 12, ხოლო გვერდითი წიბო 8. იპოვეთ იმ კვეთის ფართობი, რომელიც გადის ფუძის ორი გვერდის შუაწერტილზე პირამიდის სიმაღლის პარალელურად.

23.21. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის ფუძიდან გვერდით წახნაგზე დაშვებული პერპენდიკულარი უდრის a -ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ გვერდითი წიბოს დახრის კუთხე ფუძის სიბრტცისადმი უდრის α -ს.

23.22. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის ფუძიდან გვერდით წიბოზე დაშვებული პერპენდიკულარი უდრის p -ს. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა, თუ გვერდით წახნაგსა და პირამიდის ფუძეს შორის მთავესებული ორწახნაგა კუთხე α -ს ტოლია.

23.23. წესიერი სამკუთხა პირამიდის სიმაღლის შუაწერტილიდან დაშვებულია პერპენდიკულარები გვერდით წიბოზე და გვერდით წახნაგზე. ამ პერპენდიკულართა სიგრძეები შესაბამისად არის a და b . იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

23.24. პირამიდის ყველა გვერდითი წახნაგის სიმაღლეები ტოლია. რა კუთხით არიან ისინი დახრილი ფუძის სიბრტცისადმი, თუ პირამიდის სრული ზედაპირი სამჯერ მეტია მისი ფუძის ფართობზე?

23.25. წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის ფუძის გვერდი არის a , ხოლო წვეროსთან მდებარე ბრტყელი კუთხეები უდრის იმ კუთხეებს, რომელსაც გვერდითი წიბოები ადგენს ფუძესთან. იპოვეთ პირამიდის მოცულობა.

ამოცანები დამტკიცებზე

23.26. დაამტკიცეთ, რომ სფეროს დიამეტრის ბოლოები და სფეროს სხვა ნებისმიერი წერტილი მართკუთხა სამკუთხედის წვეროებს წარმოადგენს.

23.27. დაამტკიცეთ, რომ ბირთვის ცენტრიდან თანაბრად დაშორებულ კვეთებს ტოლი რადიუსები აქვს.

23.28. დაამტკიცეთ, რომ ბირთვის ორი კვეთიდან დიდი რადიუსი აქვს იმ კვეთას, რომლის სიბრტყე სფეროს ცენტრთან უფრო ახლოა.

23.29. R -რადიუსიანი ბირთვისადმი გაკლებულია მხეები სიბრტყე, ბირთვი იკვეთება სიბრტყით, რომელიც მხებ სიბრტყესთან φ კუთხეს ქმნის და გადის მხეების წერტილზე. დაამტკიცეთ, რომ კვეთის ფართობი ტოლია $\pi R^2 \sin^2 \varphi$.

23.30. დაამტკიცეთ, რომ თუ სფერო ეხება პარალელუპიკედის ყველა წიბოს, მაშინ ეს პარალელუპიკედი კუბია.

23.31. ცილინდრის სიმაღლეა h , ფუძის დიამეტრია d ($h < d$). დაამტკიცეთ, რომ თუ ღერძიდან $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 - h^2}$ მანძილზე გაველეხთ სიბრტყეს, მაშინ ცილინდრის კვეთა კვადრატია იქნება.

23.32. დაამტკიცეთ, რომ თუ წრფე ერთ სიბრტყეში მდებარე წვეილ-წვეილად გადმკვეთ სამ წრფესთან ტოლ კუთხეებს ადგენს, მაშინ იგი ამ სიბრტყის მართობულია.

23.33. AB და CD მონაკვეთები ერთ სიბრტყეებში არ მდებარეობენ. MN მათი შუაწერტილების შემაერთებელი მონაკვეთია. დაამტკიცეთ, რომ $AC + BD > 2 \cdot MN$.

23.34. AB და CD მონაკვეთები პარალელურ სიბრტყეებში მდებარეობენ. ამ მონაკვეთების ბოლოები წარმოადგენენ სამკუთხა პირამიდის წვეროებს. დაამტკიცეთ, რომ პირამიდის მოცულობა არ შეიცვლება, თუ მონაკვეთებს გადავაადგილებთ მოცემულ სიბრტყეებში თავისთავის პარალელურად.

23.35. წესიერი პირამიდის ფუძის ნებისმიერ წერტილზე გავლებულია ფუძის სიბრტყის პერპენდიკულარული წრფე. დაამტკიცეთ, რომ, ამ წერტილიდან წახნაგების შემცველ სიბრტყეებთან წრფის გადაკვეთის წერტილებამდე მანძილების ჯამი — მუდმივი სიდიდეა.

23.36. ტეტრაედრის შიგნით ადებულია ნებისმიერი წერტილი. d_1, d_2, d_3, d_4 არის მანძილები ამ წერტილიდან პირამიდის წახნაგებამდე, ხოლო h_1, h_2, h_3, h_4 პირამიდის შესაბამისი სიმაღლეებია. დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d_1}{h_1} + \frac{d_2}{h_2} + \frac{d_3}{h_3} + \frac{d_4}{h_4} = 1.$$

23.37. დაამტკიცეთ, რომ თუ სამკუთხა პირამიდის გვერდითი წიბოები ურთიერთმართობულია, მაშინ გვერდითი წახნაგების ფართობების ჯამი ფუძის ფართობის კვადრატის ტოლია.

პ ა ს უ ხ ე ბ ა

§1

1.1. 1) 6 სმ; 2) 18,1 მ. **1.2.** 1) 1,2 მ; 2) 2,4 სმ. **1.3.** 1) $AC=9$ მ; $BC=6$ მ. 2) $AC=10$ მ; $BC=5$ მ. 3) $AC=BC=7,5$ მ. 4) $AC=6$ მ; $BC=9$ მ. **1.4.** 7 სმ. **1.5.** 8,5 სმ. **1.6.** 1) 40 სმ. 2) 80 სმ. 3) 50 სმ. **1.7.** 1) 11 სმ. 2) 0,5 სმ. 3) 5,5 სმ. **1.8.** 0,5 მ ან 5,9 მ. **1.9.** B მდებარეობს A და C წერტილებს შორის. **1.10.** 1) არ ეკუთვნის. 2) არ ეკუთვნის. 3) ეკუთვნის. **1.11.** 1) არ შეიძლება. 2) არ შეიძლება. **1.12.** არ შეიძლება. **1.13.** არ შეიძლება. **1.14.** არ შეიძლება. **1.17.** 1) 110° ; 2) 179° . **1.18.** 1) $\angle CAB=45^\circ$; $\angle DAB=15^\circ$; 2) $\angle CAB=40^\circ$; $\angle DAB=20^\circ$. 3) $\angle CAB=\angle DAB=30^\circ$. 4) $\angle CAB=24^\circ$; $\angle DAB=36^\circ$.

§2

2.1. 1) 150° ; 2) 135° . 3) 120° . 4) 90° . **2.2.** 1) არ შეიძლება. 2) არ შეიძლება. 3) შეიძლება. **2.3.** 60° ; 120° . **2.4.** 1) 105° და 75° . 2) 110° და 70° . 3) 45° და 135° . **2.5.** 1) 72° და 108° . 2) 54° და 126° . **2.6.** 150° ; 150° ; 30° . **2.7.** 54° . **2.8.** 130° . **2.9.** 25° ; 25° . **2.10.** 144° და 36° . **2.11.** 65° და 115° . **2.12.** ყველა კუთხე მართია. **2.13.** 1) 15° . 2) 26° . 3) 86° . **2.14.** 1) 120° . 2) 150° . 3) 178° . **2.15.** 155° . 2) 135° . 3) 105° . **2.16.** 20° ; 140° . **2.17.** 20° . **2.18.** 90° .

§3

3.1. 10 მ. **3.2.** 0,3 მ. **3.3.** 3,5 მ. **3.4.** 1) 3,2 მ; 6,2 მ; 6,2 მ. 2) 7,2 მ; 4,2 მ; 4,2 მ. **3.5.** 10 სმ. **3.6.** 6 სმ; 6 სმ; 9 სმ ან 8 სმ; 8 სმ; 5 სმ. **3.7.** 10 სმ; 10 სმ; 1 სმ. **3.8.** 12 სმ. **3.9.** 15 მ. **3.10.** 15 მ. **3.11.** 13 სმ. **3.12.** 40° . **3.13.** 96° . **3.14.** 10 სმ. **3.15.** 26 სმ. **3.16.** $AB=14$ სმ; $BC=7$ სმ.

§4

4.1. 105° და 75° . **4.2.** 75° . **4.3.** სამი კუთხე, თითოეული 72° ; ოთხი კუთხე, თითოეული 108° . **4.4.** 65° და 115° . **4.5.** 45° და 135° . **4.6.** 1) 100° . 2) 65° . 3) 35° . **4.7.** 1) 30° ; 60° ; 90° . 2) 40° ; 60° ; 80° . 3) 45° ; 60° ; 75° . **4.8.** 1) 100° . 2) 70° . 3) 36° . **4.9.** 1) 50° . 2) 30° . 3) 75° .

4.10. 70° და 40° ს6 55° და 55° . **4.11.** 40° ; 40° . **4.12.** 15° . **4.13.** 30° .
4.14. 42° . **4.15.** 55° ; 55° ; 70° . **4.16.** 1) 38° ; 38° ; 104° . 2) 66° ; 66° ; 48° .
4.17. 18 სმ. **4.18.** 8 სმ. **4.19.** 12,5 სმ. **4.20.** 20 სმ და 40 სმ. **4.21.**
 1,2 მ. **4.22.** 75° . **4.23.** 92 მმ. **4.24.** 15° ; 15° ; 150° . **4.25.** 1) 80° ; 80° ;
 20° . 2) 70° ; 70° ; 40° . 3) ორი კუთხე $\left(120^\circ - \frac{2}{3}\alpha\right)$ -ს ტოლია, მეხამე
 $\beta^\circ - \left(\frac{4}{3}\alpha - 60^\circ\right)$. **4.26.** 36° . **4.27.** 1) 105° . 2) $180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.
 3) $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. **4.28.** 60° . **4.29.** 20° . **4.30.** 35° ; 55° . **4.31.** 10° . **4.32.** 80° .
4.33. 15° . **4.34.** 60° . **4.35.** 45° . **4.36.** 35° ; 35° ; 110° . **4.37.** 30° ; 60° ; 90° .
4.38. 110° . **4.39.** $\angle A = 40^\circ$; $\angle B = 60^\circ$; $\angle C = 80^\circ$. **4.40.** α . **4.41.** 60° . **4.42.** 140° ;
 10° . **4.43.** 90° . **4.44.** 36° და 144° . **4.45.** 100° . **4.46.** 24° ; 24° ; 132° .
4.47. 50° . **4.48.** 70° . **4.49.** 30° ; 90° . **4.50.** 30° ; 60° ; 90° .

§5

5.1. 5 სმ; 25 სმ. **5.2.** 70 სმ; 10 სმ. **5.3.** 60° . **5.4.** 120° . **5.5.** 2 სმ.
5.6. 2 სმ; 4 სმ. **5.7.** 5,5 სმ. **5.8.** 1) 6 სმ; 3 სმ. 2) 1,5 სმ. **5.9.** 1 სმ.
5.10. 8 სმ. **5.11.** 7,5 სმ. **5.12.** 12 სმ. **5.13.** 120° . **5.14.** 15 სმ; 6 სმ. **5.15.**
 18 სმ; 10 სმ; 2 სმ. **5.16.** 12,5 სმ; 5 სმ; 2,5 სმ. **5.17.** 2 სმ. **5.18.** 12 სმ;
 8 სმ. **5.19.** 10 სმ; 25 სმ. **5.20.** 90° . **5.21.** R ; 60° . **5.22.** 9 სმ. **5.23.** 100° .
5.24. 59° . **5.25.** α ს6 $180^\circ - \alpha$. **5.26.** 36° ; 106° . **5.27.** 150° . **5.28.** 10 სმ.
5.29. 5 სმ. **5.30.** 30° ; 150° . **5.31.** 30° ; 150° . **5.32.** 60° ; 120° . **5.33.** $52,5^\circ$;
 $82,5^\circ$; 45° . **5.34.** 49° . **5.35.** 108° . **5.36.** 40° ; 40° ; 100° . **5.37.** 48° . **5.38.** 45° .
5.39. 24° . **5.40.** $3r$. **5.41.** $\frac{16}{3}$. **5.42.** 144° . **5.43.** 150° . **5.44.** 7° . **5.45.** 20° .
5.46. 40° . **5.47.** 105° . **5.48.** 16° ; 74° . **5.49.** 25° . **5.50.** 3 სმ; 6 სმ. **5.51.** 6:5.
5.52. 4 სმ. **5.53.** 10 სმ; 5 სმ. **5.54.** 55° ; 35° . **5.55.** 2a. **5.56.** 45° .

§6

6.1. 1) 82; 2) 107. **6.2.** $\angle A = \angle B = \angle C = 86^\circ$. **6.3.** 40° ; 90° ; 140° ; 90° .
6.4. 142° ; 22° ; 136° ; 60° . **6.5.** 50° ს6 130° . **6.6.** 10 მ. **6.7.** 40° ; 140° ; 140° .
6.8. 65° ; 115° ; 65° ; 115° . **6.9.** 60° ; 120° ; 60° ; 120° . **6.10.** 1) 40° ; 140° ;
 40° ; 140° . 2) 50° ; 130° ; 50° ; 130° . 3) 80° ; 100° ; 80° ; 100° . **6.11.** 1) 55° ;

125°; 55°; 125°. 2) 35°; 145°; 35°; 145°. 3) 20°; 160°; 20°; 160°.
6.12. 1) 36°; 144°; 36°; 144°. 2) 54°; 126°; 54°; 126°. **6.13.** 16°; 96°.
6.14. 110°; 40°. **6.15.** 70°; 110°; 70°; 110°. **6.16.** 1) 45°. 2) 135°. **6.17.**
 10 ձ. **6.18.** 25,5 կմ; 50,5 կմ. **6.19.** 0,6 ձ; 0,8 ձ. **6.20.** 0,9; 1. **6.21.** 6 կմ.
6.22. 6 կմ; 9 կմ; 6 կմ. **6.23.** 7,5 կմ; 22,5 կմ. **6.24.** 2 կմ ձև 4 կմ.
6.25. 3 կմ. **6.26.** 60 կմ. **6.27.** 1) 3; 2; 3. 2) 3; 4; 3. **6.28.** $BC=AD=4,8$ ձ.
6.29. $BE=9$ կմ; $CE=6$ կմ. **6.30.** 25°; 65°. **6.31.** 72°; 108°. **6.32.** 45°. **6.33.**
 20 կմ; 40 կմ. **6.34.** 3 կմ. **6.35.** 40 կմ. **6.36.** 10 կմ; 18 կմ.
6.37. 1,2 ձ. **6.38.** 4 ձ; 8 ձ. **6.39.** 8 ձ. **6.40.** 12 կմ. **6.41.** 10 կմ; 25 կմ
 ձև 7,5 կմ; 18,75 կմ. **6.42.** 12 կմ; 20 կմ. **6.43.** 80°; 100°. **6.44.** 70°; 110°. **6.45.**
 30°; 60°. **6.46.** 1) 30°; 150°. 2) 15°; 75°. **6.47.** 1) 60°; 120°. 2) 30°;
 60°. **6.48.** 1) 60°; 120°. 2) 80 ձձ. **6.49.** 150°. **6.50.** 5 կմ. **6.51.** 18 կմ.
6.52. 2 ձ. **6.53.** 2 ձ. **6.54.** 48 կմ. **6.55.** 4 ձ. **6.56.** 4 ձ; 8 ձ. **6.57.** 1 ձ.
6.58. 10 կմ. **6.59.** 9,2. **6.60.** 30 կմ. **6.61.** 60 կմ. **6.62.** 2 լձ. **6.63.** 1 լձ.
6.64. 4 կմ; 5 կմ; 6 կմ. **6.65.** 6 կմ. **6.66.** 30 կմ; 7,5 կմ; 10 կմ;
 12,5 կմ. **6.67.** 14 կմ; 16 կմ; 18 կմ. **6.68.** 6 կմ; 5 կմ; 5 կմ. **6.69.** 7 կմ.
6.70. 34 կմ. **6.71.** 22 ձ. **6.72.** 10 կմ. **6.73.** 30 կմ. **6.74.** 7 կմ. **6.75.** 5 կմ.
6.76. 112°; 106°. **6.77.** 70°; 110°. **6.78.** 60°; 120°. **6.79.** 60°; 120°. **6.80.**
 100°; 80°; 140°. **6.81.** 1,7 ձ. **6.82.** 132 կմ. **6.83.** 9,5 կմ; 33,5 կմ.
6.84. 24 կմ; 36 կմ. **6.85.** 20 կմ. **6.86.** 12 կմ; 42 կմ. **6.87.** 12 կմ; 32 կմ.
6.88. 10 կմ. **6.89.** 5,25 կմ. **6.90.** 15. **6.91.** 33. **6.92.** 4 ձ; 6 ձ. **6.93.** 4 ձ.
6.94. 5 կմ; 9 կմ. **6.95.** 17 կմ; 19 կմ; 21 կմ. **6.96.** 3 ձ; 4 ձ. **6.97.** 7 կմ.
6.98. 10 կմ; 4 կմ. **6.99.** 15 ձ. **6.100.** 3 կմ. **6.101.** 2,2 ձ. **6.102.** 42 կմ.
6.103. 1. **6.104.** 96 կմ. **6.105.** 8. **6.106.** 0,8. **6.107.** 28 կմ. **6.108.** 6 կմ.
6.109. 7,75 կմ. **6.110.** 45°; 90°; 135°; 90°. **6.111.** 105°; 125°. **6.112.** 24°;
 156°; 24°; 156°. **6.113.** 70°; 90°; 110°; 90°. **6.114.** 65°; 115°; 115°; 65° ձև
 35°; 145°; 145°; 35°. **6.115.** 80°. **6.116.** 81°; 99°. **6.117.** 37°; 143°; 37°;
 143°. **6.118.** 10 կմ. **6.119.** 2 կմ. **6.120.** 30 կմ. **6.121.** 3 ձ; 6 ձ; 9 ձ; 6 ձ.
6.122. 3 կմ. **6.123.** 25 կմ. **6.124.** 27 կմ. **6.125.** 30°. **6.126.** 2.

§7

7.1. 0,8 ձ; 1 ձ; 1,2 ձ. **7.2.** 10 ձ; 25 ձ; 20 ձ. **7.3.** 1 ձ; 2 ձ; 2,5 ձ.
7.4. 6,5 ձ; 5,5 ձ. **7.5.** 20 կմ; $23\frac{1}{3}$ կմ; $26\frac{2}{3}$ կմ լձ 18 կմ; 21 կմ;
 24 կմ. **7.6.** 2,8 կմ; 4,2 կմ; 2 կմ; 8,4 կմ. **7.7.** 8 լձ; 42 լձ; 16 լձ;
 20 լձ. **7.8.** 100 ձ; 40 ձ. **7.9.** 52. **7.10.** 1) 15 ձ; 2) 20 լձ; 3) 9 ձ.
7.11. 13,6 կմ. **7.12.** 108,8 ձ; 217,6 ձ; 217,6 ձ. **7.13.** 18. **7.14.** 12 կմ.

7.15. 6 бә. 7.16. 8. 7.17. 6; 8. 7.18. $CD=3$ бә; $BD=9$ бә. 7.19. 20.
 7.20. 3,6. 7.21. 25,7. 7.22. $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. 7.23. $\frac{4ab}{a+b}$. 7.24. 6. 7.25. $\frac{bc}{b+c}$.
 7.26. $\sqrt{pq}$. 7.27. 25. 7.28. 300 а. 7.29. 32. 7.30. 10 бә; 26 бә.
 7.31. 12 бә; 4 бә. 7.32. 1,5 бә. 7.33. 30. 7.34. 27 бә. 7.35. $\frac{ab}{a+b}$.
 7.36. $\frac{ah}{a+h}$. 7.37. 10 бә; 18 бә. 7.38. 12 бә. 7.39. $\frac{ah}{a+2h}$. 7.40. $\sqrt{5}$;
 $2\sqrt{5}$. 7.41. 4 бә. 7.42. 15 бә; 18 бә. 7.43. 4,5 бә. 7.44. 5,2. 7.45. 18
 бә; 40 бә. 7.46. 3. 7.47. 4. 7.48. $n:m$. 7.49. 2,9. 7.50. 6. 7.51. 32 бә.
 7.52. 1. 7.53. 24 бә. 7.54. 33 а. 7.55. 24 бә; 8 бә. 7.56. 12 бә; 6 бә.
 7.57. 6 бә; 12 бә; 1 а. 7.58. 16 бә. 7.59. 10 бә. 7.60. 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$.
 7.61. 21 бә. 7.62. 10 бә. 7.63. 18 бә. 7.64. 30 бә. 7.65. 18 бә; 12 бә.
 7.66. 1) 4 бә. 2) 20 а. 3) $AB=35$ а; $AC=15$ а. 7.67. 84 бә. 7.68. 8 бә.

§8

8.1. а) 5. б) 41. в) 29. г) 61. 8.2. а) 12. б) 24. в) 15. г) 13.
 8.3. 109 бә. 8.4. 25 бә. 8.5. 29 бә. 8.6. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 8.7. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
 8.8. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 8.9. 15 бә. 8.10. $2\sqrt{2}$ бә. 8.11. 125 бә; 125 бә; 240 бә.
 8.12. 24 бә. 8.13. 1) 5 бә; 2) 17 гә; 3) 6,5 а. 8.14. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. 8.15. 3 гә;
 4 гә. 8.16. $\frac{25}{3}$; $\frac{20}{3}$. 8.17. 1) 15 бә; 20 бә. 2) 60 а; 80 а. 8.18. 50 бә;
 72 бә. 8.19. 5,2 а. 8.20. 50. 8.21. 18 бә; 98 бә. 8.22. 49. 8.23. 12 а.
 8.24. 1) 8 бә; 2) 18 а; 3) 14 бә. 8.25. 6,5. 8.26. 32 бә; 60 бә. 8.27. 12.
 8.28. $5\sqrt{5}$. 8.29. 10 бә. 8.30. $5\sqrt{3}$; 10. 8.31. 3. 8.32. 5 бә.
 8.33. $\frac{1}{2}c(\sqrt{2}-1)$. 8.34. 8 бә; 15 бә. 8.35. 6; 8; 10. 8.36. $\sqrt{2}-1$.
 8.37. 7 бә; 24 бә; 25 бә. 8.38. $4\sqrt{2}$; $2\sqrt{7}$. 8.39. 36. 8.40. 24 бә.
 8.41. 36 бә; 54 бә. 8.42. 44 бә. 8.43. 15. 8.44. 52. 8.45. 40; 42.
 8.46. $8\sqrt{3}$. 8.47. $24\sqrt{5}$. 8.48. 38. 8.49. 9 гә. 8.50. $6\frac{1}{4}$. 8.51. 6. 8.52. 8.
 8.53. $8\sqrt{5}$; $4\sqrt{5}$. 8.54. 13,44 бә. 8.55. 65 гә. 8.56. $AE:EC=16:25$.

8.57. 21 ბმ. **8.58.** 6 ბმ. **8.59.** 25 ჯმ. **8.60.** 42,5 ბმ. **8.61.** $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$.
8.62. $9\frac{1}{15}$ ბმ. **8.63.** $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. **8.64.** $\frac{169}{24}$ ბმ; $\frac{10}{3}$ ბმ. **8.65.** 20 ბმ.
8.66. $3\frac{11}{18}$. **8.67.** 13 ბმ. **8.68.** 17 ბმ. **8.69.** 13 ბმ. **8.70.** 20 ჯმ. **8.71.** $\frac{144}{25}$.
8.72. $7\frac{9}{17}$ ბმ. **8.73.** 175 ბმ; 600 ბმ. **8.74.** 14 ბმ და 4 ბმ. **8.75.** 30.
8.76. $6\sqrt{6}$. **8.77.** 40 ბმ. **8.78.** 48 ბმ; 30 ბმ. **8.79.** 38 ჯმ; 22 ჯმ. **8.80.** 8.
8.81. $\frac{36}{25}$. **8.82.** 32 ბმ; 18 ბმ. **8.83.** 8; 18. **8.84.** 30 ბმ. **8.85.** 13; 3;
 $5\sqrt{3}+6$; $5\sqrt{3}-6$. **8.86.** $0,8r\sqrt{5}$. **8.87.** 13 ბმ. **8.88.** 40 ბმ. **8.89.** 10 ბმ.
8.90. 17 ბმ; 7 ბმ. **8.91.** 37 ბმ; $\sqrt{769}$ ბმ. **8.92.** 4,5. **8.93.** 9 ბმ; 25,63 ბმ.
8.94. $AB = \sqrt{a(a+b)}$; $CD = \sqrt{b(a+b)}$. **8.95.** 1 ჯმ. **8.96.** $2\sqrt{5}$. **8.97.** 10.
8.98. 6,8. **8.99.** $2\sqrt{3}$. **8.100.** $\sqrt{5}$. **8.101.** 16. **8.102.** 17. **8.103.** 35 ჯმ.
8.104. $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **8.105.** $5\sqrt{10}$.

§9

9.1. 7. **9.2.** 7. **9.3.** 20 ბმ; 30 ბმ. **9.4.** 10 ბმ; 15 ბმ. **9.5.** 7 ბმ; 11 ბმ. **9.6.**
 4ბმ; 7ბმ; 7ბმ; 7ბმ; 9ბმ. **9.7.** 6. **9.8.** $\sqrt{10}$. **9.9.** 11. **9.10.** 14. **9.11.** 15 ჯმ;
 25 ჯმ. **9.12.** 16,5. **9.13.** $AD=8$ ბმ; $DC=12$ ბმ. **9.14.** 10 ბმ. **9.15.** 1,8 ბმ. **9.16.**
 15. **9.17.** 10 ბმ. **9.18.** 21 ბმ; 28 ბმ. **9.19.** $9\sqrt{5}$ ბმ; $8\sqrt{10}$ ბმ. **9.20.** 60
 ბმ; 65 ბმ. **9.21.** $\sqrt{52-24\sqrt{3}}$; $\sqrt{52+24\sqrt{3}}$. **9.22.** $4\sqrt{2}$; 18. **9.23.** $BE=7$
 ბმ; $EC=5$ ბმ. **9.24.** $\sqrt{R^2+3r^2}$. **9.25.** $BE=10$ ბმ; $EC=14$ ბმ. **9.26.** 42; 56.
9.27. 39 ბმ; 65 ბმ. **9.28.** 50 ბმ. **9.29.** 16 ბმ; 20 ბმ; 20 ბმ. **9.30.** 10; 10;
 12. **9.31.** 10 ბმ. **9.32.** 8 ბმ. **9.33.** 5 ბმ. **9.34.** 12 ბმ; 15 ბმ; 18 ბმ. **9.35.** 9
 ბმ; $1\frac{5}{7}$ ბმ; $14\frac{2}{7}$ ბმ. **9.36.** 1 ბმ. **9.37.** 16 ბმ. **9.38.** 4 ბმ. **9.39.** 15. **9.40.**
 $\frac{15}{13}$. **9.41.** 0,9. **9.42.** 18 ჯმ; 80 ჯმ. **9.43.** 6 ბმ. **9.44.** 18. **9.45.** 5. **9.46.** 0,1.
9.47. 69. **9.48.** 40. **9.49.** 37. **9.50.** 90. **9.51.** 10. **9.52.** 20. **9.53.** 9. **9.54.** 96.
9.55. 42. **9.56.** 12. **9.57.** 6. **9.58.** 15; 3. **9.59.** 84. **9.60.** 84. **9.61.** 1. **9.62.** 96.
9.63. 72. **9.64.** 98. **9.65.** 25. **9.66.** 3. **9.67.** 140.

§10

10.1. 4 Թ; 9 Թ. **10.2.** $36\sqrt{2}$ Եձ. **10.3.** 8 Թ; 5 Թ. **10.4.** 84 Եձ². **10.5.** 82 Եձ.
10.6. 4800 Թ². **10.7.** $\frac{a^2}{4}$. **10.8.** 2250 Եձ² ՏԵ 522 Եձ². **10.9.** 98 Եձ².
10.10. 1:2. **10.11.** 4 Եձ. **10.12.** 6. **10.13.** 20. **10.14.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **10.15.** 10 Եձ.
10.16. 24 ԶԹ. **10.17.** 4 Եձ; 12 Եձ. **10.18.** $0,5ab$. **10.19.** 30. **10.20.** 5 Թ².
10.21. 1 Թ. **10.22.** 25 Եձ; 10 Եձ; 50Եձ². **10.23.** 14 Եձ; 10 Եձ. **10.24.** 68.
10.25. $0,5a^2$. **10.26.** 200 Եձ². **10.27.** 9,6 Թ. **10.28.** $\sqrt{15}$ Եձ. **10.29.** 9,6 Եձ.
10.30. 202,8 Եձ². **10.31.** 120. **10.32.** 20. **10.33.** 30°. **10.34.** 30. **10.35.** 64.
10.36. 45. **10.37.** 5. **10.38.** 10 Եձ. **10.39.** 14 Եձ. **10.40.** 20 Եձ. **10.41.** 16
Եձ; 20 Եձ. **10.42.** 14,25 Եձ². **10.43.** $0,5a^2$. **10.44.** 66. **10.45.** $\frac{63}{8}$; $\frac{105}{8}$.
10.46. 90. **10.47.** 32. **10.48.** 256 Եձ². **10.49.** 288 Եձ². **10.50.** 17. **10.51.** 24
ԶԹ². **10.52.** 540 Թ². **10.53.** 216 Եձ². **10.54.** $\frac{mn}{6}$. **10.55.** 36 Թ². **10.56.** 4
Եձ². **10.57.** $18\sqrt{3}$ Եձ². **10.58.** 6 Եձ²; 12 Եձ². **10.59.** 1:2. **10.60.** 24. **10.61.**
2. **10.62.** 2 Եձ². **10.63.** $\frac{25}{3}$ Եձ². **10.64.** 30. **10.65.** 54 Եձ². **10.66.**
 $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$. **10.67.** 20 Եձ; 10 Եձ ՏԵ 5 Եձ; 40 Եձ. **10.68.** $3a^2(7-4\sqrt{3})$.
10.69. 7 Եձ; 9 Եձ ՏԵ 21 Եձ; 3 Եձ. **10.70.** 27 Եձ². **10.71.** 6 ԶԹ². **10.72.**
8,64 Թ²; 15,36 Թ². **10.73.** $\sqrt{3}$ Եձ. **10.74.** 300 ԶԹ². **10.75.** 10. **10.76.** 2:3.
10.77. 3:2. **10.78.** 5 Եձ. **10.79.** $\frac{8}{3}$. **10.80.** 99. **10.81.** 24. **10.82.** 144. **10.83.**
64. **10.84.** 30. **10.85.** 2. **10.86.** $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ ԶԹ; $\frac{9\sqrt{5}}{5}$ ԶԹ. **10.87.** $AD=6$ Թ;
 $BE=8$ Թ. **10.88.** $\frac{11}{3}$. **10.89.** 0,25. **10.90.** 0,25. **10.91.** 12 Եձ².
10.92. $(\sqrt{6}+2):1$ ՏԵ $(\sqrt{3}+1):2$. **10.93.** $26\sqrt{2}$ Եձ. **10.94.** $10\sqrt{2}$ Թ. **10.95.**
4:21:56. **10.96.** 1) 84; 2) 12; 3) 288. **10.97.** 2 Թ. **10.98.** 112. **10.99.** 18 Եձ;
20 Եձ; 34 Եձ. **10.100.** 144 Եձ². **10.101.** 1224 Եձ². **10.102.** 25 ՏԵ 39.
10.103. 84 Եձ². **10.104.** 9. **10.105.** 270 Եձ². **10.106.** 30. **10.107.** 8 Եձ.

10.108. 16 бә. **10.109.** $R = \frac{65}{8}$; $r=4$. **10.110.** 4,5. **10.111.** $\frac{25}{4}$; 3; $\frac{5}{4}$.
10.112. 1700 бә². **10.113.** 10,625 бә. **10.114.** 54. **10.115.** 3. **10.116.** $\frac{300}{13}$.
10.117. 60 бә². **10.118.** 2 бә. **10.119.** 8,4 бә². **10.120.** 60 бә²; 40 бә².
10.121. $0,25(3+\sqrt{3})R^2$. **10.122.** 4,5. **10.123.** 24. **10.124.** $0,5R^2$. **10.125.** 8.
10.126. $1,25\sqrt{3}R^2$. **10.127.** 6 бә. **10.128.** $\frac{4}{5}$. **10.129.** 24.
10.130. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3}-1)$. **10.131.** $\frac{12}{25}$. **10.132.** 48. **10.133.** 30. **10.134.** 4.
10.135. 150. **10.136.** 8 бә². **10.137.** 81. **10.138.** $\frac{2}{9}$. **10.139.** 18.
10.140. 125 бә². **10.141.** 20 бә². **10.142.** 48. **10.143.** 3 бә. **10.144.** 84 бә².
10.145. 480. **10.146.** 10,625 бә. **10.147.** 5. **10.148.** 6. **10.149.** 27.
10.150. $\frac{3}{2}$. **10.151.** 2,16. **10.152.** $\frac{54}{5}$. **10.153.** 6. **10.154.** 2. **10.155.** 39.

§11

11.1. $2m\sqrt{3}$. **11.2.** $8r^2\sqrt{3}$. **11.3.** 72. **11.4.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **11.5.** $\frac{9a^2\sqrt{3}}{16}$. **11.6.** $\frac{3}{8}$.
11.7. $2r^2\sqrt{3}$. **11.8.** 27. **11.9.** $84\sqrt{6}$ бә. **11.10.** $\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$.
11.11. $4\sqrt{3}:9:6\sqrt{3}$. **11.12.** 2. **11.13.** 18. **11.14.** 10. **11.15.** 24. **11.16.** $\frac{Q\sqrt{3}}{2}$.
11.17. $\frac{Q\sqrt{2}}{2}$. **11.18.** $a\cos\frac{180^\circ}{n}$. **11.19.** $r\cos\frac{180^\circ}{n}$. **11.20.** $\cos\frac{180^\circ}{n}$.
11.21. $2a\cos\frac{180^\circ}{n}$. **11.22.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **11.23.** $\frac{a}{2}(2+\sqrt{2})$. **11.24.** 18.
11.25. 1) $\frac{2\pi a}{3}$; 2) $a\sqrt{2}\pi$; 3) $2\pi a$. **11.26.** 1) $\frac{\pi a}{\sqrt{3}}$; 2) πa ; 3) $\pi a\sqrt{3}$.
11.27. 1) 90° ; 2) $22,5^\circ$. **11.28.** $\frac{360}{2\pi}$. **11.29.** 450 бә; $\frac{225}{\pi}$ бә.
11.30. 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{2\pi a\sqrt{2}}{9}$. **11.31.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2l\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}$.

11.32. $\frac{l^2}{4\pi}$. **11.33.** 2. **11.34.** 15π . **11.35.** $\frac{16\sqrt{3}\pi}{3} \lg^2$. **11.36.** $285,61\pi \lg^2$.
11.37. $\pi(p-c)^2$. **11.38.** $25\pi \lg^2$. **11.39.** $25\pi \lg^2$. **11.40.** 96. **11.41.** 12.
11.42. 14; 8. **11.43.** 5; 7. **11.44.** $\frac{89\pi}{4}$. **11.45.** $\frac{8Q}{\pi}$. **11.46.** $R\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.
11.47. 60° . **11.48.** 42. **11.49.** 75. **11.50.** 15. **11.51.** $\frac{\pi}{12}$. **11.52.** $\frac{64\pi}{\sqrt{15}}$.
11.53. $\frac{\pi a^2}{12}$. **11.54.** $100\pi \lg^2$. **11.55.** $\frac{7}{3}\pi$. **11.56.** 3:1. **11.57.** $\frac{100\pi}{9}$.
11.58. 6π . **11.59.** $20\pi \lg^2$. **11.60.** $\frac{4}{3}$. **11.61.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **11.62.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
11.63. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; $\frac{R\sqrt{6}}{3}$. **11.64.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **11.65.** 1:4. **11.66.** 2. **11.67.** $\frac{\pi a^2}{4}$.
11.68. 3:4. **11.69.** 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{2\pi R^2}{3}$. **11.70.** 1) 0,5; 2) 0,125;
3) 0,05. **11.71.** 1) 180° ; 2) 240° ; 3) $337, 5^\circ$. **11.72.** 10. **11.73.** 60° . **11.74.** 30° .
11.75. $12\pi \lg^2$. **11.76.** 100° . **11.77.** $2R$. **11.78.** $\frac{R}{3}$. **11.79.** 1,5.
11.80. $\frac{aR}{a+2R}$. **11.81.** 1) $\frac{R^2}{4}(4-\pi)$; 2) $\frac{R^2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)$; 3) $\frac{R^2}{6}(2\sqrt{3}-\pi)$.
11.82. 1) $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$; 2) $\frac{R^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$; 3) $\frac{R^2}{8}(\pi-2\sqrt{2})$; 4) $\frac{R^2}{12}(\pi-3)$.
11.83. 1) $\frac{a^2}{36}(4\pi-3\sqrt{3})$; 2) $\frac{a^2}{8}(\pi-2)$; 3) $\frac{a^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$.
11.84. $(6\pi-9\sqrt{3}) \lg$. **11.85.** $\frac{R^2}{4}(\pi-2)$. **11.86.** $\frac{R^2}{2}(\pi+\sqrt{3})$. **11.87.** 2.
11.88. 3. **11.89.** $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{8\pi+3\sqrt{3}}$. **11.90.** 2. **11.91.** 3. **11.92.** $\frac{(4\pi-3\sqrt{3})R^2}{6}$.

§13

- 13.1. $\sqrt{b^2 + bc}$. 13.2. $\frac{a}{3}\sqrt{13-12\cos\alpha}$. 13.3. 30° . 13.4. $\alpha = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;
 $\beta = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. 13.5. $a+b$. 13.6. $\frac{9\sqrt{7}}{16}$. 13.7. $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.
13.8. $\frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha$. 13.9. 3. 13.10. $1-\cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$. 13.11. $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$.
13.12. 1,5. 13.13. $\frac{8\sqrt{3}-9}{4}$. 13.14. $m^2:(2m+1)$. 13.15. $4\sqrt{6}$.
13.16. $\sqrt{\frac{ab+cd}{bc+ad}}(ac+bd)$; $\sqrt{\frac{ad+bc}{ab+cd}}(ac+bd)$. 13.17. $\frac{3}{4}$. 13.18. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.
13.19. $\frac{85}{8}$. 13.20. $\frac{90}{\sqrt{97}}$. 13.21. $r(3\sqrt{5}-1)$. 13.22. $\frac{9\sqrt{3}}{4}r^2$.
13.23. $\arcsin\sqrt{S}$. 13.24. $6\sqrt{3}$. 13.25. $\cos x = \frac{2\sin\alpha\sin\gamma}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\gamma - \sin^2\beta}}$.
13.26. $\frac{1}{\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}}$. 13.27. 1. 13.28. $\sqrt{\frac{5}{2}}$. 13.29. 6. 13.30. $\frac{147\sqrt{3}}{52}$.
13.31. $BC = 2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$; $AC = 2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$; $AB = 2\sqrt{R\cdot r}$. 13.32. $\sqrt{\frac{67}{3}}$.
13.33. 60.

§14

- 14.1. 50. 14.2. 14. 14.3. 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{3}}h$. 14.4. 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$;
3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 14.5. 2. 14.6. 4 бә. 14.7. 16. 14.8. 6 бә; 15 бә. 14.9. 15 бә;
41 бә. 14.10. 4 бә; 8 бә. 14.11. 9 бә. 14.12. 20. 14.13. $2\sqrt{2}$. 14.14. 36.
14.15. $a\sqrt{2}$. 14.16. $a\sqrt{6}$. 14.17. 39. 14.18. 7. 14.19. 45° . 14.20. 30° .
14.21. 60° . 14.22. 120° . 14.23. 9. 14.24. 45. 14.25. 29. 14.26. 13. 14.27. 16.
14.28. 70. 14.29. 20. 14.30. 0,6 б. 14.31. 3. 14.32. 15. 14.33. 7. 14.34. 14.
14.35. 7. 14.36. 60° . 14.37. 10. 14.38. 15. 14.39. 8. 14.40. 10. 14.41. 14.

14.42. 18. 14.43. 16. 14.44. 10. 14.45. 24. 14.46. 6. 14.47. 5. 14.48. 10.
14.49. 24. 14.50. 14. 14.51. 13. 14.52. 5. 14.53. 96. 14.54. 27. 14.55. 48.
14.56. 18. 14.57. 8. 14.58. 13. 14.59. $\sqrt{c^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$. 14.60. 5.

§15

15.1. 1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{AD}$; 3) $\overrightarrow{BD}$; 4) $\overrightarrow{AD}$. 15.2. 1) $\overrightarrow{DB_1}$; 2) $-\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{DB_1}$; 4)
 $-\overrightarrow{CD}$; 5) $\overrightarrow{DB_1}$; 6) $-\overrightarrow{CD}$. 15.3. 1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AC}$. 15.4. $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

15.5. $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$. 15.6. 1) $\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a})$; 2) $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$. 15.7. 1)

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$; 2) $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. 15.8. 1) A და B მდებარეობს

წრეწირზე, რომლის ცენტრია O ; 2) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ თანამიმართულია ან ერთ-ერთი მაინც ნულოვანია; 3) $\vec{a}$ და $\vec{b}$ ვექტორებს ურთიერთ-საწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ ან ერთ-ერთი მაინც ნულოვანია; 4) $\vec{a} \perp \vec{b}$ ან ერთ-ერთი მაინც ნულოვანია. 15.9. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

15.10. 1) 3; 2) $-3\sqrt{3}$. 15.11. $\frac{16\sqrt{2}-9}{4}$. 15.12. არა. 15.13. 1) $\overrightarrow{AB}(-2;3)$; 2)

$\overrightarrow{BD}(-6;1)$; 3) $\overrightarrow{DC}(5;3)$; 4) $\overrightarrow{AD}(-8;4)$. 15.14. 1) $\overrightarrow{AB}(4;-1;-8)$; 2)

$\overrightarrow{BC}(0;-1;9)$; 3) $\overrightarrow{DC}(0;4;2)$; 4) $\overrightarrow{AD}(4;2;-1)$. 15.15. 1) $B(0;6)$; 2) $B(-1;0)$; 3)

$B(4;-1;4)$; 4) $B(-7;8;-4)$. 15.16. 1) $D(14;-2)$; 2) $D(12;3;-6)$. 15.17. $A(-7;4)$.

15.18. $C(2;4)$. 15.19. 1) $E(-4;0)$; 2) $F(0;3)$. 15.20. 1) $(-2;5)$; 2) $(-6;11)$; 3) $(2;-1)$; 4) $(-6;13)$; 5) $(6;-13)$; 6) $(26;-49)$. 15.21. 1) $(-2;4;-4)$; 2) $(-2;-4;6)$; 3) $(-6;8;-7)$; 4) $(-8;-12;19)$. 15.22. 1) $5\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{74}$; 4) $\sqrt{61}$. 15.23. 1)

$|\vec{a}| = \sqrt{61}$; 2) $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$; 3) $|\vec{a}| = \sqrt{205}$; 4) $|\vec{a}| = \sqrt{105}$. 15.24. 1) $m = \pm 5$; 2)

$m = \pm 12$; 3) 0 ან 6; 4) $m = \sqrt{47} - 1$ ან $m = -\sqrt{47} - 1$. 15.25. 1) კი; 2) არა;

3) კი; 4) არა. 15.26. $\lambda = 5$. 15.27. $\alpha = -\frac{4}{3}$, $\beta = -6$. 15.29. 1) $\sqrt{117}$; 2)

$\sqrt{89}$. 15.30. 1) $\vec{a}(-\sqrt{10}; -3\sqrt{10})$; 2) $\vec{a}(6; -3; 3)$. 15.31. $(-6; -3; 6)$. 15.32. $(6; 5; -3; 5)$. 15.33. $C(14; -11)$. 15.34. $\vec{c}(-3; -4; 14)$. 15.35. $D(2; 1; 5)$. 15.36. 1)

$5\sqrt{3}$; 2) -21 ; 3) -32 ; 4) $17,5\sqrt{2}$. 15.37. 1) 45° ; 2) 150° . 15.38. 1) 3; 2) 3; 3)

45; 4) 0. 15.39. 25. 15.40. 1) $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $2\sqrt{21}$; 4) $\sqrt{10}$. 15.41. 1)

$-\frac{3}{2}$; 2) -7. **15.42.** $5\sqrt{10}$. **15.43.** 8. **15.44.** 11. **15.45.** $\alpha = \frac{3}{4}$. **15.46.** $\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$. **15.47.** 1) -2; 2) -1. **15.48.** 1) -17; 2) -5; 3) -4; 4) 11. **15.49.** 1) -43; 2) -6; 3) 9; 4) -3. **15.50.** 1) 18; 2) -12. **15.51.** 1) 0; 2) $-\frac{4}{5}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{21}}$; 4) $-\frac{2}{\sqrt{10}}$. **15.52.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 3; 3) 1; 4) 2.

§16

16.1. 1) აზო; 2) აზო; 3) კო(აზო); 4) კო; 5) კო; 6) აზო. **16.2.** 1) $C\left(-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 2) $A(11;0)$. **16.3.** 1) $M'(-3;-5)$; 2) $M'(3;-7)$. **16.4.** 1) $M'(5;6)$; 2) $M'(10;4)$. **16.5.** $MN = 6$. **16.6.** $P = 32$. **16.7.** 1) ხაზი; 2) ორი; 3) ერთი; 4) ექვსი; 5) ოთხი; 6) არცერთი; 7) არცერთი; 8) ერთი. **16.8.** ახლო სამკვთხედი არ არსებობს. **16.9.** 1) უამრავი; 2) ერთი. **16.10.** 1) $(-5;-2)$; 2) $(5;2)$; 3) $(9;2)$; 4) $(-5;-4)$; 5) $(2;-5)$. **16.11.** 1) $y = -2x - 3$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$. **16.12.** 1) $k = -2; b = 7$; 2) $k = -2; b = -7$; 3) $k = \frac{1}{2}; b = -14$. **16.13.** 1) $C'(5;-2)$; 2) $C'(2;-6)$; 3) $C'(-4;-7)$; 4) $C'(5;-2)$. **16.14.** 24 ჯგ. **16.15.** 1) $R_0^{0^\circ}$; 2) $R_0^{120^\circ}$; 3) $R_0^{-110^\circ}$; 4) $R_0^{160^\circ}$; 5) $R_0^{170^\circ}$; 6) $R_0^{-50^\circ}$; 7) $R_0^{110^\circ}$; 8) $R_0^{50^\circ}$. **16.16.** 1) $(-4;0)$; 2) $(0;-7)$; 3) $(2;-5)$; 4) $(3;2)$. **16.17.** 1) 25; 2) 6; 3) $13\sqrt{3}$; 4) $5\sqrt{2}$. **16.18.** 1) 80° ; 2) -70° ; 3) -165° ; 4) 75° . **16.19.** 1) -4; 2) $-\sqrt{5}$; 3) $2\sqrt{6}$; 4) $-\sqrt{57}$. **16.20.** 1) $(0;3)$; 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}; -\frac{5}{2}\right)$; 4) $(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$; 5) $(-2; -2\sqrt{3})$; 6) $\left(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$. **16.21.** 1) $(-2;4)$; 2) $(4;-4)$; 3) $(0;-5\sqrt{2})$; 4) $\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}; -\frac{7\sqrt{6}}{2}\right)$; 5) $(3\sqrt{3}; 3)$; 6) $(2; 2\sqrt{3})$. **16.22.** 1) $(-1;5)$; 2) $(-3;2)$; 3) $(-8;12)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}; 1\right)$. **16.23.** 1) $M'(-3;2)$; 2) $M'(4;-3)$; 3) $M'(-2;-6)$; 4) $M'(9;-2)$. **16.24.** 1) $5/3$; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $3/2$; 4) -3. **16.25.** 1) $k = -1$; 2) $k = 1/2$. **16.26.** 1) -2; 2) 1,5. **16.27.** 1) -5; 2) $-\frac{1}{5}$; 3) 6; 4) $6/5$; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $-\frac{1}{5}$. **16.28.** 3; 1. **16.29.**

- 1) $y = 2x + 9$; 2) $y = -2x - \frac{3}{2}$; 3) $y = -\frac{3}{2}x + 5$; 4) $y = \frac{4}{5}x + 6$. **16.30.** 1) $-\frac{3}{2}$;
 2) -4 ; 3) $-\frac{4}{3}$; 4) $\frac{3}{7}$; 5) -3 . **16.31.** (6; -12). **16.32.** 1) $M'(11; -5)$; 2) $M'(1; 6)$.
16.33. 1) (6; 5); 2) (-1; -9). **16.34.** 1) (8; 0); 2) (-8; 5). **16.35.** 1) $y = 5x + 2$; 2)
 $y = -2x - \frac{5}{2}$; 3) $y = -3x - 5$; 4) $y = \frac{1}{2}x - 4$; 5) $y = \frac{3}{5}x + 8$; 6) $y = -5x + 12$.
16.36. 1) $y = -3x + 8$; 2) $y = 5x - 41$. **16.37.** 1) $y = 2x^2 + 3$; 2) $y = -3x^2 + 3$;
 3) $y = -5(x - 2)^2$; 4) $y = x^2 + 6x + 11$; 5) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{13}{2}$; 6) $y = -x^2 - 5x - 1$.
16.38. 1) $y = -2x^2 + 4x + 9$; 2) $y = 3\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$.

§17

- 17.1.** 54 бѧ². **17.2.** 2 ѧ. **17.3.** 98 бѧ². **17.4.** 30 бѧ². **17.5.** 37,5 бѧ².
17.6. 1) $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2a^2}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2a^2}{\sqrt{3}}$. **17.7.** 45°. **17.8.** 60°. **17.9.** $5\sqrt{2}$.
17.10. 5. **17.11.** $2\sqrt{6}$. **17.12.** 12. **17.13.** $50\sqrt{5}$ бѧ². **17.14.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.
17.15. $a\left(\sqrt{5} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; $\frac{9a^2}{8}$. **17.16.** 1) 3; 2) 7; 3) 11. **17.17.** $5\sqrt{2}$ бѧ;
 45°. **17.18.** 20 бѧ. **17.19.** 12 бѧ. **17.20.** 1464 бѧ². **17.21.** 6 бѧ; 14 бѧ;
 16 бѧ. **17.22.** 2 ѧ². **17.23.** 14 бѧ. **17.24.** 900 бѧ². **17.25.** 18,5 бѧ².
17.26. 124 ѧѧ². **17.27.** $36\sqrt{2} + 40$. **17.28.** 35. **17.29.** 7,5. **17.30.** 13 ѧ;
 9 ѧ. **17.31.** 10 бѧ. **17.32.** 1416 бѧ². **17.33.** $2a$; $a\sqrt{2}$. **17.34.** 4 ѧ;
 $\sqrt{12}$ ѧ. **17.35.** 188 ѧ². **17.36.** $220 + 24\sqrt{3}$; 70. **17.37.** 2 ѧ²; 3 ѧ².
17.38. 12 бѧ². **17.39.** 288 бѧ². **17.40.** 82 ѧ². **17.41.** 48. **17.42.** 21,3.
17.43. 50 ѧ². **17.44.** 12 ѧ². **17.45.** 9 бѧ². **17.46.** 63 бѧ². **17.47.** 60.
17.48. 22. **17.49.** 1. **17.50.** $\sqrt{2}$. **17.51.** 4. **17.52.** 25. **17.53.** $4\sqrt{2}$.
17.54. 46. **17.55.** 14. **17.56.** 13 бѧ. **17.57.** 17. **17.58.** 24. **17.59.** 60°.
17.60. 8 ѧ². **17.61.** 17,5 бѧ². **17.62.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ab$. **17.63.** 30. **17.64.** $8\sqrt{3}$.
17.65. 3. **17.66.** $9\sqrt{3}$. **17.67.** $2\sqrt{3}$. **17.68.** 72. **17.69.** 9 бѧ².
17.70. 2,25 бѧ². **17.71.** 48. **17.72.** 3 бѧ². **17.73.** 9 бѧ². **17.74.** $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$.
17.75. 8 бѧ². **17.76.** $3\sqrt{3}a^2 + 6ah$. **17.77.** 35 бѧ. **17.78.** 14 бѧ. **17.79.** $2a$

17.80. 3 ∂^2 . 17.81. 3 $\text{b}\partial$. 17.82. 8 $\text{b}\partial$.
 17.83. $3a^2$. 17.84. 63. 17.85. 2 ∂ . 17.86. 4980 $\text{b}\partial^2$. 17.87. 88 $\text{b}\partial^2$.
 17.88. 34; 20; 18. 17.89. $Q\sqrt{2}$. 17.90. 32 $\text{b}\partial^2$. 17.91. 56 $\text{b}\partial^2$.
 17.92. 906 $\text{b}\partial^2$. 17.93. $\frac{496}{\sqrt{13}}$. 17.94. 4. 17.95. $4\sqrt{74}$. 17.96. 2400.

§18

18.1. 4. 18.2. 8. 18.3. 7. 18.4. 5. 18.5. $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$. 18.6. $\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$.
 18.7. $a\left(a + \sqrt{a^2 + 4h^2}\right)$. 18.8. $256\sqrt{2}$. 18.9. 9 $\text{b}\partial$. 18.10. 10 $\text{b}\partial$. 18.11.
 1,8 ∂ ; 4 ∂ . 18.12. 8. 18.13. 5,5. 18.14. $\sqrt{2}$. 18.15. 14 $\text{b}\partial^2$. 18.16. 24.
 18.17. 72 $\text{b}\partial^2$. 18.18. $3a^2$. 18.19. 63 $\text{b}\partial^2$. 18.20. 32 $\text{b}\partial^2$. 18.21. 90.
 18.22. 60 $\text{b}\partial^2$. 18.23. 84. 18.24. 45. 18.25. 90. 18.26. $\frac{3}{2}a^2$. 18.27. 5.
 18.28. $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$. 18.29. $\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}$. 18.30. $\frac{a\sqrt{3}}{4}\left(a + \sqrt{a^2 + 12h^2}\right)$.
 18.31. 60° . 18.32. 16,5 $\text{b}\partial$. 18.33. 3,75 $\text{b}\partial^2$. 18.34. 4. 18.35. $36\sqrt{7}$; 4.
 18.36. 63 $\text{b}\partial^2$. 18.37. 60° . 18.38. $\frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$. 18.39. 288 $\text{b}\partial^2$. 18.40. 4; $8\pi\sqrt{3}$.
 18.41. $36\left(\sqrt{7} + \sqrt{3}\right)$. 18.42. 4,5. 18.43. 6,5 $\text{b}\partial$. 18.44. 16 $\text{b}\partial$ և 6 $\text{b}\partial$ և
 12 $\text{b}\partial$ և 8 $\text{b}\partial$. 18.45. 50. 18.46. $\frac{2025\sqrt{6}}{4}$. 18.47. $S\sqrt{3}$. 18.48. $\sqrt{b^2 - a^2}$.
 18.49. $\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}$. 18.50. $\frac{3a}{2}\left(a\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 + 4h^2}\right)$. 18.51. $2r\left(r\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 - r^2}\right)$.
 18.52. $2r(l+r)\sqrt{3}$. 18.53. $\frac{3}{2}\sqrt{(l^2 - h^2)(3l^2 + h^2)}$. 18.54. 900 $\text{b}\partial^2$.
 18.55. 60. 18.56. 99 $\text{b}\partial^2$. 18.57. ah . 18.58. 90 $\text{b}\partial^2$. 18.59. $\frac{Q}{\cos \alpha}$.
 18.60. $\frac{38}{5}$. 18.61. 60° . 18.62. 12 $\text{b}\partial$. 18.63. 26 ∂^2 . 18.64. 5 $\text{b}\partial$; 6 $\text{b}\partial$.
 18.65. 768 $\text{b}\partial^2$. 18.66. $\frac{a}{2}\text{tg}\beta$. 18.67. $2\sqrt{3}$ $\text{b}\partial$. 18.68. 32,2. 18.69. 252.

18.70. 147. 18.71. 42. 18.72. 12 бѧ. 18.73. $\frac{15}{4}\sqrt{3}$. 18.74. 3 бѧ. 18.75. 27.
18.76. 84. 18.77. 10. 18.78. 10 ѧ². 18.79. $\frac{1}{4}Q$. 18.80. 225 бѧ²; 100 бѧ²;
25 бѧ². 18.81. 11 ѧ.

§19

19.1. 5 ѧ. 19.2. π . 19.3. 100. 19.4. 7. 19.5. 6. 19.6. 36 бѧ². 19.7. 6. 19.8. 5.
19.9. 56. 19.10. 96 бѧ². 19.11. 14. 19.12. 5 ѧ. 19.13. 0,5. 19.14. R^2 .
19.15. 12 бѧ². 19.16. 99. 19.17. 4. 19.18. 50. 19.19. $2R^2\sin\alpha$. 19.20. $2H^2$.
19.21. 500 бѧ². 19.22. 13,5 бѧ². 19.23. $100\sqrt{2}$ бѧ². 19.24. $\frac{H}{\sqrt{2}}$.
19.25. $\frac{1}{4}\pi R^2$. 19.26. $\pi R^2 \cdot \frac{m^2}{(m+n)^2}$. 19.27. 4π . 19.28. 40. 19.29. 25π .
19.30. 27π . 19.31. 21. 19.32. 5. 19.33. 60° . 19.34. 2. 19.35. 4π . 19.36. 3π .
19.37. 12.

§20

20.1. $\frac{d^3\sqrt{2}}{4}$. 20.2. $\frac{1}{9}d^3\sqrt{3}$. 20.3. 64 бѧ³. 20.4. $\frac{1}{6}S\sqrt{\frac{1}{6}}S$. 20.5. 24 ѧ².
20.6. 30 ѧ. 20.7. 6 бѧ³. 20.8. 288 бѧ³. 20.9. 88 бѧ². 20.10. 96.
20.11. 60 ѧ³. 20.12. 56 ѧ³. 20.13. $\frac{144\sqrt{3}}{5}$. 20.14. $60\sqrt{3}$. 20.15. 13,5 бѧ³.
20.16. $\frac{512\sqrt{5}}{125}$. 20.17. 144 бѧ³. 20.18. 96 бѧ³. 20.19. 648 бѧ³. 20.20. $\frac{9}{4}$.
20.21. 5 бѧ. 20.22. $abhs\sin\alpha$. 20.23. 11,25 бѧ³. 20.24. 32. 20.25. 60 бѧ³.
20.26. 780 бѧ³. 20.27. $4\sqrt{3}$ бѧ³. 20.28. $\frac{h^3}{2}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. 20.29. 187,5 бѧ³.
20.30. 48. 20.31. 16. 20.32. 360 бѧ². 20.33. 64 бѧ³. 20.34. 3 ѧ³. 20.35. a^2b .
20.36. 112. 20.37. $12\sqrt{6}$. 20.38. 92. 20.39. 3 бѧ³. 20.40. $8\sqrt{2}$ бѧ³ ѧ6
32 бѧ³. 20.41. 108 бѧ³. 20.42. 24. 20.43. 54 бѧ³. 20.44. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$.
20.45. $20\sqrt{3}$. 20.46. 5. 20.47. $54\sqrt{3}$. 20.48. 6. 20.49. $128\sqrt{3}$. 20.50. 192.

20.51. $2,25R^3$. **20.52.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. **20.53.** $72 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **20.54.** $\frac{15}{2}\sqrt{15}$.
20.55. $2\sqrt[3]{25}$; $\sqrt{5\sqrt[3]{25}}$. **20.56.** $1,5a$. **20.57.** 6 а^3 . **20.58.** 15 . **20.59.** 10 .
20.60. 45 . **20.61.** $\frac{d^3}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta$. **20.62.** $7320 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **20.63.** $48 \text{ б}\mathfrak{a}^3$.
20.64. $48 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **20.65.** 105 а^3 . **20.66.** $10,5$. **20.67.** $\frac{1}{8}d^3 \sin \beta \sin 2\beta \sin 2\alpha$.
20.68. $6 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **20.69.** $\frac{\sqrt{3}}{10}$.

§21

21.1. 32 . **21.2.** 144 . **21.3.** 400 . **21.4.** 192 . **21.5.** 12 . **21.6.** $\frac{1}{12}l^3\sqrt{3}$. **21.7.** 144 .
21.8. $\frac{1}{6}a^3 \operatorname{tg} \alpha$. **21.9.** 48 . **21.10.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **21.11.** $33 \text{ б}\mathfrak{a}^2$. **21.12.** 32 . **21.13.** 324 .
21.14. $\frac{4a^3 \operatorname{tg} \alpha}{3(1+\operatorname{tg} \alpha)^3}$. **21.15.** 6 . **21.16.** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$. **21.17.** $\frac{343\sqrt{2}}{6}$. **21.18.** 9 .
21.19. $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h$. **21.20.** $\frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2-a^2}$. **21.21.** $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$. **21.22.** $\frac{\sqrt{3}}{4}h(l^2-h^2)$.
21.23. $4,5$. **21.24.** $66 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **21.25.** $686\sqrt{6}$. **21.26.** 4π . **21.27.** $\frac{\sqrt{109}}{3}$.
21.28. $\frac{\sqrt{3}}{27}h^2\sqrt{9m^2-h^2}$. **21.29.** $5 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **21.30.** $72 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **21.31.** 90 .
21.32. $\frac{1}{3}h^3\sqrt{3}$. **21.33.** 2 . **21.34.** $\frac{1}{6}b^3$. **21.35.** $36 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **21.36.** $\frac{\sqrt{47}}{24}$.
21.37. $\frac{\sqrt{23}}{3}$. **21.38.** $\frac{1}{2}h^3\sqrt{3}$. **21.39.** 48 . **21.40.** 3 . **21.41.** $\frac{\sqrt{3}a^3 \operatorname{tg} \alpha}{(1+\operatorname{tg} \alpha)^3}$.
21.42. $\frac{1}{2}\sqrt{3}a^2h$. **21.43.** $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3(b^2-a^2)}$. **21.44.** $72 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **21.45.** $7 \text{ б}\mathfrak{a}$.
21.46. $\frac{3}{4}a^3$. **21.47.** $\frac{3l^3}{16}$. **21.48.** $14 \text{ б}\mathfrak{a}$. **21.49.** 360 а^3 . **21.50.** $120 \text{ б}\mathfrak{a}^3$.
21.51. $\frac{b^3\sqrt{3}}{24}$. **21.52.** $50 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. **21.53.** 6 . **21.54.** 10 . **21.55.** 5 . **21.56.** 2 .

21.57. $\frac{1}{6}a^3$. 21.58. $6V$. 21.59. $\frac{8r^3\sqrt{3}}{3}$. 21.60. $500 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 21.61. $71 \text{ }\mathfrak{a}^3$.
 21.62. $80 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 21.63. $40 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 21.64. $48 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 21.65. $108 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 21.66. $6 \text{ б}\mathfrak{a}^3$.
 21.67. 5 . 21.68. $10 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 21.69. $4 \text{ }\mathfrak{a}^3$. 21.70. $8 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 21.71. $12 \text{ б}\mathfrak{a}^3$.

§22

22.1. $\pi R^2 H$; $2\pi R(R+H)$. 22.2. $36\pi \text{ б}\mathfrak{a}^2$. 22.3. πa^3 . 22.4. $2\pi ab$; πab^2 .
 22.5. $4\pi\sqrt{2}$. 22.6. $17,5 \text{ }\mathfrak{a}$. 22.7. $6,5 \text{ б}\mathfrak{a}^2$. 22.8. πh^2 . 22.9. π^2 . 22.10. R .
 22.11. πQ . 22.12. $97 \text{ б}\mathfrak{a}^2$. 22.13. $4 \text{ б}\mathfrak{a}$. 22.14. $3,75$. 22.15. 30π . 22.16. 6 .
 22.17. $\frac{a^3}{4\pi}$. 22.18. 6 . 22.19. 72 . 22.20. 33 . 22.21. $\frac{1}{2}d^2 \sin \alpha$. 22.22. 4 .
 22.23. 75 . 22.24. 91 . 22.25. 93 . 22.26. $12\pi a^2$. 22.27. $\frac{1}{3}\pi R^2 H$;
 $\pi R\sqrt{R^2 + H^2} + \pi R^2$. 22.28. $\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2 - R^2}$; $\pi R(l + R)$. 22.29. 80π .
 22.30. 24π ; 12π . 22.31. 7π . 22.32. $\frac{1}{3}\pi l^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$. 22.33. $\frac{S}{\cos \alpha}$.
 22.34. 55 . 22.35. 6 . 22.36. $25 \text{ б}\mathfrak{a}$. 22.37. 45° . 22.38. $\frac{3V}{\pi R}$. 22.39. $9\pi \text{ }\mathfrak{a}^3$.
 22.40. $23 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 22.41. 49 . 22.42. 228 . 22.43. $\frac{25\sqrt{6}}{2}$. 22.44. $\frac{128\pi}{3\sqrt{3}}$.
 22.45. $91 \text{ }\mathfrak{a}^3$. 22.46. $\frac{1}{3}\pi l^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha$. 22.47. $\frac{\pi a^2 H}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$. 22.48. 81 .
 22.49. $2:1$. 22.50. πH^2 . 22.51. $12\pi \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 22.52. $96\pi \text{ б}\mathfrak{a}^2$. 22.53. $200\pi \text{ }\mathfrak{a}^2$.
 22.54. $24\pi \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 22.55. $73 \text{ }\mathfrak{a}^2$. 22.56. $\frac{3\sqrt{\pi}}{\pi}$. 22.57. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
 22.58. $\frac{\pi l^2}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi - \alpha}{4} \right) \sin \alpha}$. 22.59. $6 \text{ б}\mathfrak{a}$. 22.60. $92 \text{ }\mathfrak{a}^3$. 22.61. 15π .
 22.62. 240π . 22.63. $18 \text{ б}\mathfrak{a}^3$. 22.64. $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. 22.65. 15π .
 22.66. 2 . 22.67. 2 . 22.68. $\frac{2\pi}{3}$. 22.69. $\frac{4}{3}\pi \text{ }\mathfrak{a}^3$; 4π . 22.70. $6 \text{ б}\mathfrak{a}$.

22.71. $562,5\pi$ მ³. **22.72.** 4 მ². **22.73.** $\sqrt[3]{36\pi}\sqrt{2}$. **22.74.** 180. **22.75.** 84.
22.76. უდიდესის ზედაპირის ფართობი დანარჩენი ორი ზედაპირის ფართობების ჯამის ტოლია. **22.77.** 25π მ². **22.78.** 1764π .
22.79. 20 სმ. **22.80.** 20 სმ. **22.81.** $2R\sqrt[3]{4}$. **22.82.** 1. **22.83.** π .

§23

23.1. 6,5 მ. **23.2.** $\sqrt{52}$. **23.3.** $\sqrt{2b^2 - a^2}$. **23.4.** $\sqrt{73}$. **23.5.** 0,2. **23.6.** $\frac{a}{2}$.
23.7. 41. **23.8.** 5 მ; 3 მ. **23.9.** 45 სმ². **23.10.** 75 სმ². **23.11.** 460,8 სმ².
23.12. $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. **23.13.** $16(\sqrt{2}+1)$. **23.14.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **23.15.** $\frac{1}{9}$.
23.16. $\arcsin \frac{2\cos \alpha}{\sqrt{3}}$. **23.17.** $\arctg \sqrt{2}$. **23.18.** 45. **23.19.** 135. **23.20.** 128.
23.21. $\frac{a^3\sqrt{3(4tg^2\alpha+1)^3}}{4tg^2\alpha}$. **23.22.** $\frac{p^3\sqrt{3(4+tg^2\alpha)^3}}{8tg^2\alpha}$. **23.23.** $\frac{18a^3b^3}{(a^2-b^2)\sqrt{4b^2-a^2}}$.
23.24. 60°. **23.25.** $\frac{1}{6}a^3\sqrt{1+\sqrt{5}}$.

საცნობარო მასალა

პლანიმეტრია

სამკუთხედი

სამკუთხედის გვერდები a, b, c ; სიმაღლეები — h_a, h_b, h_c ; მედიანები — m_a, m_b, m_c ; შიგა კუთხეები — A, B, C ; ბისექტრისები — l_a, l_b, l_c ; r —ჩახაზული წრის რადიუსი; R —შემოხაზული წრის რადიუსი;

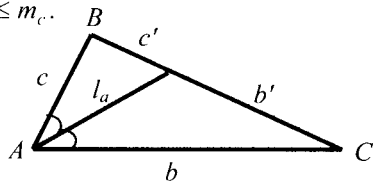
$p = \frac{a+b+c}{2}$ — ნახევარპერიმეტრი; S —სამკუთხედის ფართობი

$$1. \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$$2. a+b > c, a+c > b, b+c > a,$$

$$3. h_a \leq l_a \leq m_a; h_b \leq l_b \leq m_b; h_c \leq l_c \leq m_c.$$

$$4. h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



$$5. \text{ ა) } l_a^2 = bc - b'c', \text{ ბ) } \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

სამკუთხედის ფართობი

$$1. S = \frac{1}{2} a \cdot h_a; S = \frac{1}{2} b \cdot h_b; S = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

$$2. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{ჰერონის ფორმულა}).$$

$$3. S = \frac{1}{2} ab \sin C; S = \frac{1}{2} bc \sin A; S = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

$$4. S = r \cdot p \quad (\text{ფორმულა მართებულა წრეწირზე შემოხაზული ნებისმიერი მრავალკუთხედისათვის}).$$

$$5. S = \frac{abc}{4R}.$$

$$6. \text{ თუ } \triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1, \text{ მაშინ: } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = \frac{AB^2}{A_1 B_1^2} = \frac{h_a^2}{h_{a_1}^2} = \frac{l_b^2}{l_{b_1}^2} = \frac{m_c^2}{m_{c_1}^2}.$$

სინუსების თეორემა

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

კოსინუსების თეორემა

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

მართკუთხა სამკუთხედი

1) დამოკიდებულება მართკუთხა სამკუთხედის ელემენტებს შორის:

ა) $h_c^2 = a_c \cdot b_c$, $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.

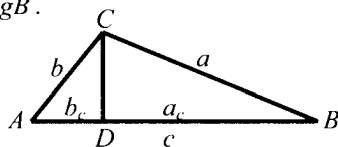
ბ) $a^2 + b^2 = c^2$ (პითაგორას თეორემა).

გ) $a = c \cdot \sin A$; $b = c \cdot \sin B$; $a = b \cdot \operatorname{tg} A$;

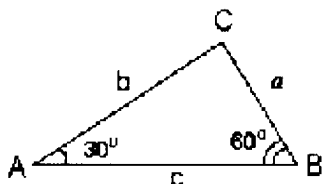
$a = c \cdot \cos B$; $b = c \cdot \cos A$; $a = b \cdot \operatorname{ctg} B$.

დ) $r = \frac{a+b-c}{2} = p-c$; $R = \frac{c}{2}$.

ე) $S = \frac{1}{2}ab$.



1. 30° -იანი კუთხის მქონე მართკუთხა სამკუთხედი:



ა) $a = \frac{c}{2}$, ბ) $b = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

წესიერი სამკუთხედი

1. $a_3 = R\sqrt{3}$; $a_3 = 2\sqrt{3}r$ (a_3 - სამკუთხედის გვერდი).

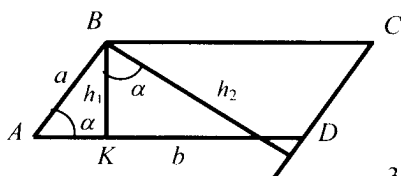
2. $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$; $R = 2r$.

ოთხკუთხედები

ოთხკუთხედის ფართობი დიაგონალებისა და მათ შორის კუთხის სინუსის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.

პარალელოგრამი

$ABCD$ პარალელოგრამში, $AB = a$, $AD = b$;



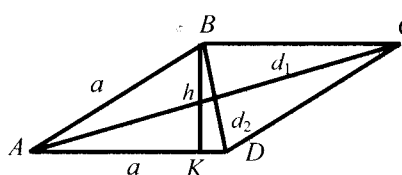
1) $AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$

2) $S = ah_2$; $S = bh_1$.

3) $S = ab \sin \alpha$. 4) $S = \frac{h_1 \cdot h_2}{\sin \alpha}$.

რომბი

რომბში d_1 და d_2 დიაგონალებია, a – გვერდი:



$$1) d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$2) S = ah.$$

$$3) S = a^2 \sin A.$$

$$4) S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$$

კვადრატი

$$1. a_4 = R\sqrt{2}; a_4 = 2r \quad (a_4 - \text{კვადრატის გვერდია}),$$

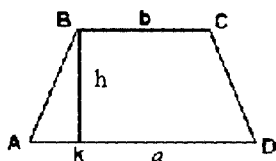
$$2. R = \frac{a_4}{\sqrt{2}}; R = \sqrt{2} r. \quad 3. r = \frac{a_4}{2}; r = \frac{R\sqrt{2}}{2}. \quad 4. S = a^2; S = 2R^2; S = 4r^2.$$

ტრაპეცია

$ABCD$ ტრაპეციაში $AD = a$, $BC = b$, $BK = h$.

$$1. S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

$$2. \text{როცა } AB = CD; AK = \frac{a-b}{2}; KD = \frac{a+b}{2}.$$



3. თუ ტოლფედა ტრაპეციაში დიაგონალები ურთიერთპერპენდიკულარულია, მაშინ სიმაღლე შუამონაკვეთის ტოლია

$$h = \frac{a+b}{2} \quad \text{და} \quad S = h^2.$$

წესიერი ექვსკუთხედი. წესიერი n -კუთხედი

$$1. a_6 = R, a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}} \quad (a_6 - \text{წესიერი ექვსკუთხედის გვერდია}).$$

$$2. S = \frac{3\sqrt{3}a_6^2}{2}, S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}; S = 2\sqrt{3}r^2.$$

3. წესიერი n -კუთხედის ცენტრალური კუთხე $\frac{360^\circ}{n}$ – ის ტოლია.

4. წესიერი n -კუთხედის კუთხე $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ – ის ტოლია.

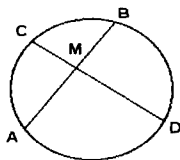
5. წესიერი n -კუთხედის გვერდი $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, სადაც R შემოხაზული წრეწირის რადიუსია.
6. წესიერ n -კუთხედში ჩახაზული წრეწირის რადიუსი $r = R \cos \frac{180^\circ}{n}$.
7. მრავალკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი არის $180^\circ(n-2)$, სადაც n გვერდების რიცხვია.
8. მრავალკუთხედის წვეროსთან თითო-თითოდ აღებული გარე კუთხეების ჯამი 360° -ის ტოლია.
9. n -კუთხედში შეიძლება $\frac{n(n-3)}{2}$ დიაგონალის გავლება.

წრეწირი, წრე

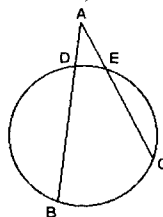
1. ჩახაზული კუთხე იზომება იმ რკალის ნახევრით, რომელსაც იგი ეყრდნობა.

2. გადამკვეთ ქორდებს შორის კუთხე $\angle AMD = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC})$; (ნახ. I)

3. მკვეთებს შორის კუთხე $\angle BAC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{DE})$. (ნახ. II)



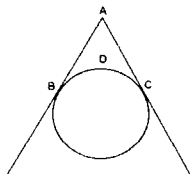
ნახ. I



ნახ. II

4. მხებიტა და ქორდით შედგენილი კუთხე იზომება მათ შორის მოთავსებული რკალის ნახევრით.

5. მხებებს შორის მოთავსებული კუთხე $\angle BAC = 180^\circ - \overset{\frown}{BDC}$.



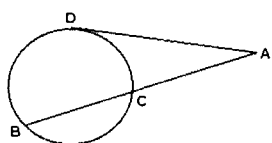
6. წრეწირის სიგრძის შეფარდება დიამეტრთან ყველა წრეწირისათვის ერთი და იგივე რიცხვია. ეს რიცხვი აღინიშნება π ასოთი. $\pi \approx 3,14$,

$$\frac{c}{2R} = \pi. \text{ წრეწირის სიგრძე } c = 2\pi R; \text{ წრის ფართობი } S = \pi R^2.$$

7. S სექტორის ფართობია, R - სექტორის რადიუსი, l - რკალის სიგრძე, ცენტრალური კუთხე $-\alpha$ რადიანი, $S = \frac{1}{2}R^2\alpha$, $l = R\alpha$.

8. სეგმენტის ფართობი $S = \frac{1}{2}R^2(\alpha \pm \sin \alpha)$.

პროპორციული მონაკვეთები წრეში



ნახ. III

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD \quad (\text{ნახ. I});$$

$$AD \text{ მხევის მონაკვეთია. } AD^2 = AB \cdot AC \quad (\text{ნახ. III}).$$

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE \quad (\text{ნახ. II}).$$

სტერეომეტრია

1. მართკუთხა პარალელეპიპედის დიაგონალის კვადრატი უდრის მისი სამი განზომილების კვადრატების ჯამს.
2. პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი პერპენდიკულარული კვეთის პერიმეტრის გვერდით წიბოზე ნამრავლის ტოლია.
3. მართი პრიზმის გვერდითი ზედაპირის ფართობი უდრის ფუძის პერიმეტრის ნამრავლს სიმაღლეზე.
4. წესიერი პირამიდის გვერდითი ზედაპირის ფართობი აპოთემის და ფუძის პერიმეტრის ნამრავლის ნახევრის ტოლია.
5. მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა მისი სამივე განზომილების ნამრავლის ტოლია.
6. პარალელეპიპედის მოცულობა ფუძის ფართობისა და სიმაღლის ნამრავლის ტოლია.
7. პირამიდის მოცულობა $V = \frac{1}{3}Qh$, სადაც Q ფუძის ფართობია, h სიმაღლე.
8. ცილინდრის სიმაღლეა H , ფუძის წრეწირის რადიუსია R , გვერდითი ზედაპირის ფართობია S , სრული ზედაპირის ფართობი T , მოცულობა $-V$, მაშინ $S = 2\pi RH$, $T = 2\pi R(H + R)$, $V = \pi R^2 H$.
9. კონუსის სიმაღლეა H , ფუძის წრეწირის რადიუსი $-R$, გვერდითი ზედაპირის ფართობი S , სრული ზედაპირის ფართობი $-T$, მოცულობა $-V$, მსახველი $-l$, მაშინ $S = \pi Rl$, $T = \pi R(l + R)$,

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

10. სფეროს ზედაპირის ფართობი $S = 4\pi R^2$, სადაც R სფეროს რადიუსია.

11. ბირთვის მოცულობა $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

ჰომოთეტია

ჰომოთეტია O ცენტრით და k კოეფიციენტით არის სიბრტყის თავის თავზე ასახვა, როცა ყოველ X წერტილს შეესაბამება ისეთი X' წერტილი, რომ თუ $k > 0$, მაშინ X' ეკუთვნის OX სხივს და $OX' = k \cdot OX$; ხოლო თუ $k < 0$, მაშინ O არის X -სა და X' წერტილებს შორის და $OX' = |k| \cdot OX$.

მანძილი ორ წერტილს შორის

თუ მოცემულია წერტილები $M_1(x_1, y_1, z_1)$ და $M_2(x_2, y_2, z_2)$, მაშინ

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

გომეტრიული გარდაქმნები: $M(x, y) \rightarrow M'(x', y')$

- 1) პარალელური გადატანა $\vec{n}(a; b)$ ვექტორით: $x' = x + a$, $y' = y + b$;
- 2) სიმეტრია აბსცისთა ღერძის მიმართ: $x' = x$, $y' = -y$;
- 3) სიმეტრია ორდინატთა ღერძის მიმართ: $x' = -x$, $y' = y$;
- 4) სიმეტრია კოორდინატთა სათავის მიმართ: $x' = -x$, $y' = -y$;
- 5) ჰომოთეტია k კოეფიციენტით კოორდინატთა სათავის მიმართ: $x' = kx$, $y' = ky$;
- 6) მობრუნება კოორდინატთა სათავის გარშემო $\frac{\pi}{2}$ კუთხით: $x' = -y$, $y' = x$.

ს ა რ ც ე მ ა

მეოთხე გამოცემის წინასიტყვაობა	3
მეხუთე გამოცემის წინასიტყვაობა	4
პლანიმეტრი	
§1. პლანიმეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები	5
§2. კუთხეები	10
§3. სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. სამკუთხედის ელემენტები	12
§4. წრფეთა პარალელურობის ნიშნები	14
§5. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. ტოლფერდა სამკუთხედი. დამოკიდებულება სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის	16
§6. მართკუთხა სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. მანძილი წერტილიდან წრფემდე	19
§7. მონაკვეთის შუაპერპენდიკულარი. კუთხის ბისექტრისის თვისე- ბა	23
§8. წრეწირი. სამკუთხედზე შემოხაზული და სამკუთხედში ნახაზუ- ლი წრეწირი	25
§9. ცენტრალური და ნახაზული კუთხეები	28
§10. მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე. კუთხე წვეროთი წრეწირის შიგნით და წრეწირის გარეთ	32
§11. მრავალკუთხედები	34
§12. ოთხკუთხედები	37
პარალელოგრამი	37
მართკუთხედი. რამბი. კვადრატი	40
თაღისის თეორემა. სამკუთხედის შუამონაკვეთი	41
ტრაპეცია. ტრაპეციის შუამონაკვეთი	44
ტოლფერდა ტრაპეციის თვისებები	45
ნახაზული და შემოხაზული ოთხკუთხედები	46
§13. ფიგურათა გარდაქმნა	48
§14. ფიგურათა ტოლობა. მსგავსების გარდაქმნა	53
§15. ფიგურათა მსგავსება. სამკუთხედების მსგავსების ნიშნები	54
§16. პითაგორას თეორემა	57
§17. დამოკიდებულება მართკუთხა სამკუთხედის გვერდებსა და კუთხეებს შორის	59
§18. კოსინუსების თეორემა. სინუსების თეორემა	60
§19. სამკუთხედების ამოხსნა	64
§20. ფიგურათა ფართობები	65
მართკუთხედის ფართობი	66
პარალელოგრამის ფართობი	68
სამკუთხედის ფართობი	69
ტრაპეციის ფართობი	71
ნებისმიერი ოთხკუთხედის ფართობი	72
მსგავსი მრავალკუთხედების პერიმეტრებისა და ფართობების	

შეფარდება	72
§21. წესიერი მრავალკუთხედები	74
§22. წრეწირის სიგრძე, წრის ფართობი	76
§23. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა	80
მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები	80
მანძილი ორ წერტილს შორის	81
წრეწირის განტოლება	82
§24. აგების ამოცანები	82

სტერეომეტრია

§25. სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები	86
§26. წრფეებისა და სიბრტყეების პარალელურობა	89
პარალელური და აცდენილი წრფეები	89
წრფისა და სიბრტყის პარალელურობა	91
სიბრტყეთა პარალელურობა	92
§27. წრფეებისა და სიბრტყეების მართობულობა	94
წრფეთა მართობულობა	94
წრფისა და სიბრტყის მართობულობა	95
სამი მართობის თეორემა	97
სიბრტყეთა მართობულობა	98
მანძილი აცდენილ წრფეებს შორის	100
§28. დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა სივრცეში	100
§29. ფიგურათა გარდაქმნა სივრცეში	102
§30. ვექტორები	103
წრფივი ოპერაციები ვექტორებზე	105
ვექტორის გეგმილი ღერძზე, დეკარტის მართკუთხა ბაზისი	108
ვექტორთა სკალარული ნამრავლი	112
პარალელური გადატანა ვექტორით	115
§31. კუთხეები წრფეებსა და სიბრტყეებს შორის, მრავალკუთხედის ორთოგონალური გეგმილის ფართობი	116
§32. მრავალწახნაგები	119
მრავალწახნაგა კუთხეები	119
მრავალწახნაგა	120
პრიზმა	120
პარალელეპიპედი	122
პირამიდა	124
§33. ბრუნვითი სხეულები და მათი ზედაპირის ფართობი	126
ცილინდრი	126
კონუსი	128
ბირთვი, სფერო	129
§34. სხეულის მოცულობა	131
მართკუთხა პარალელეპიპედის მოცულობა	132
დახრილი პარალელეპიპედის მოცულობა	134
პრიზმისა და პირამიდის მოცულობა	135
ცილინდრის, კონუსის და ბირთვის მოცულობა	137

აგროცანათა კრებულო

პლანიმეტრიკა

§1.	პლანიმეტრიის ძირითადი ცნებები და აქსიომები	138
§2.	კუთხეები	139
§3.	სამკუთხედების ტოლობის ნიშნები. ტოლფერდა სამკუთხედი ..	141
	ამოცანები გამოთვლაზე	141
	ამოცანები დამტკიცებაზე	142
§4.	წრფეთა პარალელურობა. სამკუთხედის კუთხეების ჯამი. მონაკვეთის შუამართობი. კუთხის ბისექტრისა	143
	ამოცანები გამოთვლაზე	143
	ამოცანები დამტკიცებაზე	147
§5.	წრეწირი. ცენტრალური და ნახაზული კუთხეები. მხებითა და ქორდით შედგენილი კუთხე. კუთხე წვეროთი წრეწირის შიგნით და წრეწირის გარეთ	148
	ამოცანები გამოთვლაზე	148
	ამოცანები დამტკიცებაზე	153
§6.	მრავალკუთხედები. პარალელოგრამი. მართკუთხედი. რომბი. კვადრატი. ტრაპეცია. ნახაზული და შემოხაზული ოთხკუთხედები	155
	ამოცანები გამოთვლაზე	155
	ამოცანები დამტკიცებაზე	165
§7.	ფიგურათა მსგავსება	168
	ამოცანები გამოთვლაზე	168
	ამოცანები დამტკიცებაზე	174
§8.	პითაგორას თეორემა	175
	ამოცანები გამოთვლაზე	175
	ამოცანები დამტკიცებაზე	184
§9.	კოსინუსების თეორემა. სინუსების თეორემა. სამკუთხედების ამოხსნა	185
	ამოცანები გამოთვლაზე	185
	ამოცანები დამტკიცებაზე	192
§10.	ფიგურათა ფართობი	193
	ამოცანები გამოთვლაზე	193
	ამოცანები დამტკიცებაზე	205
§11.	წრეწირში ნახაზული და მასზე შემოხაზული მრავალკუთხედები. წრეწირის სიგრძე. წრისა და მისი ნაწილების ფართობი	208
	ამოცანები გამოთვლაზე	208
	ამოცანები დამტკიცებაზე	215
§12.	ამოცანები აგებაზე	217
§13.	სხვადასხვა სახის ამოცანები	219
	ამოცანები გამოთვლაზე	219
	ამოცანები დამტკიცებაზე	222

§14. სტერეომეტრიის ძირითადი ცნებები. წრფეთა და სიბრტყეთა პარალელობა და მართობულობა	225
ამოცანები გამოთვლაზე	225
ამოცანები დამტკიცებაზე	231
§15. ემპტორები	233
ამოცანები გამოთვლაზე	233
ამოცანები დამტკიცებაზე	240
§16. ფიგურათა გარდაქმნა	240
§17. კუბი. პარალელეპიპედი. პრიზმა	245
ამოცანები გამოთვლაზე	245
ამოცანები დამტკიცებაზე	254
§18. პირამიდა	255
ამოცანები გამოთვლაზე	255
ამოცანები დამტკიცებაზე	263
§19. ცილინდრი. კონუსი. ბირთვი	264
§20. კუბის, პარალელეპიპედის, პრიზმის მოცულობა	267
ამოცანები გამოთვლაზე	267
ამოცანები დამტკიცებაზე	273
§21. პირამიდის მოცულობა	274
ამოცანები გამოთვლაზე	274
ამოცანები დამტკიცებაზე	280
§22. ცილინდრის, კონუსის და ბირთვის მოცულობა და ზედაპირის ფართობი	280
ამოცანები გამოთვლაზე	280
ამოცანები დამტკიცებაზე	287
§23. სხვადასხვა სახის ამოცანები	288
ამოცანები გამოთვლაზე	288
ამოცანები დამტკიცებაზე	291
პასუხები	293
ხაზობარო მასალა	310
ღათინური და ბერძნული ანბანი	316

იბეჭდება ავტორთა მიერ
წარმოდგენილი სახით

გადაეცა წარმოებას 05.11.2008. ხელმოწერილია დასაბუჯდად
12.11.2008. ქაღალდის ზომა 60×84 1/16. პირობითი ნაბეჭდი
თაბახი 20. სააღრიცხვო-საგამომცემლო თაბახი 18. ტირაჟი
500 ეგზ. შეკვეთა №

საგამომცემლო სახლი „ტექნიკური უნივერსიტეტი“,
თბილისი, კოსტავას 77

